http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°10 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{-5x^2+6x+8}-2x+1$ 2) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-2\sqrt{x}-15}$ 3) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

4) $f(x)=\sqrt{-2x(x-2)(x^2-8x+16)}$

Solution : 1) $f(x)=\sqrt{-5x^2+6x+8}-2x+1$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-5x^2+6x+8\geq 0\right\}$

Calculons le discriminant du trinôme $-5x^2+6x+8$: $a=-5$; $b=6$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=6^2-4\times 8\times(-5)=36+160=196=14^2>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\dfrac{-6-14}{-10}=2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\dfrac{-6+14}{-10}=-\dfrac{4}{5}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-4/5$		2		$+\infty$
$-5x^2+6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left[-\dfrac{4}{5};2\right]$

2) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-2\sqrt{x}-15}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-2\sqrt{x}-15\neq 0 \text{ et } x\geq 0\right\}$

$x-2\sqrt{x}-15=0\Leftrightarrow\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}-15=0$

On pose : $\sqrt{x}=X$ donc l'équation devient : $X^2-2X-15=0$

Le discriminant est $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times(-15)=64$ et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{2-\sqrt{64}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\dfrac{2+\sqrt{64}}{2\times 1}=5$

Donc on a : $\sqrt{x}=-3$ et $\sqrt{x}=5$

Mais : $\sqrt{x}=-3$ n'a pas de solution et $\sqrt{x}=5\Leftrightarrow x=5$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq 5 \text{ et } x\geq 0\right\}$

Donc : $D_f=[0;5[\cup]5;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+1>0\right\}$

$2x^2-3x+1$ Calculons son discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\dfrac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\dfrac{5+\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

4) $f(x)=\sqrt{-2x(x-2)(x^2-8x+16)}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-2x(x-2)(x^2-8x+16)\geq0\right\}$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x-2=0$ ou $x=0$

Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x=2$ ou $x=0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2-8x+16$

Calculons son discriminant : $a=1$; $b=-8$; $c=16$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-8)^2-4\times1\times16=64-64=0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=1>0$ et $\Delta=0$, alors : $x^2-8x+16\geq0$

La racine double est : $x_1=\dfrac{8}{2\times1}=4$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x=4$ ou $x=2$ ou $x=0$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-8x+16$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Par suite : $D_f=[0;2]$

Exercice2 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 2) $f(x)=x^2+2x+\dfrac{1}{x}$

Solution : 1) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; $D_g=\left\{x\in E/g(x)\in\mathbb{R}\right\}$

$D_g=\left\{x\in E/x^2+1\neq0\right\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

ATMANI NAJIB

Donc : x^2+1 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $g(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}$ donc : $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

12) $f(x)=x^2+2x+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$

Signifie $x\neq 0$ Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$

☞ $f(-x)=(-x)^2+2(-x)+\frac{1}{-x}=x^2-2x-\frac{1}{x}$

$f(-x)\neq -f(x)$

Donc : f est une fonction ni paire ni impaire.

Exercice3 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}-\{0;1\}$ el que :

$$f(x+1)=\frac{1}{1-f(x)}\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ; f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

2)Déduire que f est périodique et $T=3$ est une période de f

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x+2)=f((x+1)+1)=\frac{1}{1-f(x+1)}$ et on a : $f(x+1)=\frac{1}{1-f(x)}$

Donc : $f(x+2)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}}=\frac{1}{\frac{1-f(x)-1}{1-f(x)}}=\frac{f(x)-1}{f(x)}=1-\frac{1}{f(x)}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

2) Calculons : $\forall x\in\mathbb{R}\ ; f(x+3)=?$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x+3)=f((x+1)+2)$ comme on a : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x+2)=1-\frac{1}{f(x)}$

Alors : $f(x+3)=f((x+1)+2)=1-\frac{1}{f(x+1)}=1-(1-f(x))=f(x)$

4)Déduisons que f est périodique : Puisque → $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ x+3\in\mathbb{R}$

→ $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x+3)=f(x)$

Alors : f est périodique et 3 est une période de f

PROF: ATMANI NAJIB

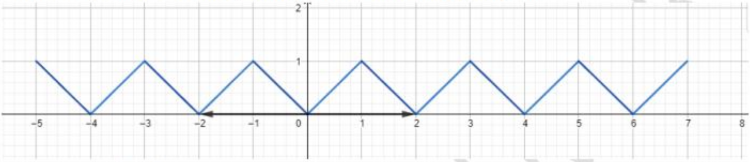
Exercice4 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$

Tel que : $\begin{cases} f(x)=x \quad si \quad x\in[0,1] \\ f(x)=2-x \quad si \quad x\in]1,2] \end{cases}$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $[-5;7]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(2025)$

Solution :1) la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;5[$ est :



2) Calculons : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(2026)$

On a : $f(x)=x \quad si \quad x\in[0,1]$ et $f(x)=2-x \quad si \quad x\in]1,2]$

$\rightarrow \frac{1}{2}\in[0,1]$ Donc : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\rightarrow 1\notin[0,1]$ et $1\notin]1,2]$ Donc : on ne peut pas utiliser l'expression de $f(x)$

$f(-1)=f(-1+2)=f(1)=1$ car $1\in[0,1]$

$\rightarrow 2\in]1,2]$ Donc : $f(2)=2-2=0$

$\rightarrow 2025\notin[0,1]$ et $2025\notin]1,2]$ Donc : on ne peut pas utiliser l'expression de $f(x)$

$f(2025)=f(1+2\times1012)=f(1)$ et $1\in[0,1]$ car f est 2 périodiques

$f(2025)=f(1)=1$

Exercice5 : Etudier les variations des fonctions définies par : 1) $f(x)=-203x-\sqrt{2}$

2) $g(x)=\frac{2012}{x}$ 3) $h(x)=\frac{1}{2}x^3-2030$ 4) $k(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x-1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : 1) $f(x)=-203x-\sqrt{2}$

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $v:x\rightarrow x$

On sait que la fonction $v:x\rightarrow x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $-203<0$ donc la fonction $-203v$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f=-203v-\sqrt{2}$ aussi décroissante sur $\mathbb{R}$

2) $g(x)=\frac{2012}{x}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v:x\rightarrow\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $g=2012v$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : g est décroissante sur $]0;+\infty[$ et est décroissante sur $]-\infty;0[$ car $-4<0$

3) $h(x)=\frac{1}{2}x^3-2030$ et $D_f=\mathbb{R}$: On sait que : $v:x\to x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$

On a : $h=\frac{1}{2}v-2030$

Puisque la fonction v est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $\frac{1}{2}v$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $\frac{1}{2}>0$

Donc : $h=\frac{1}{2}v-2030$ est croissante sur $\mathbb{R}$

4) $k(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x-1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$: $D_k=[1;+\infty[$

On a : $k=-\frac{1}{2}v-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Puisque la fonction $v:x\to\sqrt{x-1}$ est croissante sur $[1;+\infty[$

Alors : $-\frac{1}{2}v$ est décroissante sur $[1;+\infty[$ car $-\frac{1}{2}<0$

Donc : $k=-\frac{1}{2}v+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est décroissante sur $[1;+\infty[$

Exercice6 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-4x^2+4x+5$

1)a) Montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Montrer que $f(x)\le 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Réponses : 1) a) On a $D_f=\mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2=6-(4x^2-4x+1)=6-4x^2+4x-1=-4x^2+4x+5$

Donc : $f(x)=6-(2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2\ge 0$

Par suite $-(2x-1)^2\le 0$ donc $6-(2x-1)^2\le 6$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\le 6$

2° on a $f\left(\frac{1}{2}\right)=6-\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2=6-(1-1)^2=6$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $6-(2x-1)^2\le 6$ alors $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice7 : Soit f une fonction définie par : $f(x)=4\sin x+\cos 2x$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f

2) Montrer que f est périodique de période $T=2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$

2)a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\pi+x\in\mathbb{R}$

b) $f(2\pi+x)=4\sin(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))$

$f(2\pi+x)=4\sin x+\cos(2x)=f(x)$

Donc : f est périodique de période $T=2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=2\pi$

Donc : par exemple : $D_E=[0;2\pi]$

Exercice8 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+6x-2$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$ Montrer que : $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2+6$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur : $I=[-3;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur : $J=]-\infty;-3]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : f est minorée sur $\mathbb{R}$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-2;2]$ On a : $-10\le f(x)\le 14$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-6;-4]$ On a : $-10\le f(x)\le -2$

Solution : $f(x)=x^2+6x-2$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2+6x_2-2)-(x_1^2+6x_1-2)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2+6x_2-2-x_1^2-6x_1+2}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_2^2-x_1^2+6(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)+6(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+6)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=x_2+x_1+6$

3)a) Montrons que f est strictement croissante sur $[-3;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-3;+\infty[$ et $x_2\in[-3;+\infty[$ alors : $x_1\ge -3$ et $x_2\ge -3$ avec $x_1\neq x_2$ implique $x_1+x_2>-6$

Par suite : $x_1+x_2+6>0$

Donc $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-3;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J = \left]-\infty;-3\right]$

Soient : $x_1 \in \left]-\infty;-3\right]$ et $x_2 \in \left]-\infty;-3\right]$ alors : $x_1 \leq -3$ et $x_2 \leq -3$ et $x_1 \neq x_2$

Cela implique $x_1 + x_2 < -6$

Par suite : $x_1 + x_2 + 6 < 0$

Donc $T(x_1;x_2) < 0$

D'où : f est décroissante sur $J = \left]-\infty;-3\right]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-3) = (-3)^2 + 6\times(-3) - 2 = 9 - 18 - 2 = -11$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	↘	-11	↗

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-3) = -11$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(-3) \leq f(x)$

Par suite : $-11 \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc : f est minorée sur $\mathbb{R}$

b) Soit : $x \in [-2;2]$ alors : $-2 \leq x \leq 2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I = \left[-3;+\infty\right[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-2;2]$

Alors : $f(-2) \leq f(x) \leq f(2)$ et comme : $f(-2) = (-2)^2 + 6\times(-2) - 2 = 4 - 12 - 2 = -10$ et

$f(2) = 2^2 + 6\times 2 - 2 = 4 + 12 - 2 = 14$

Par suite : $-10 \leq f(x) \leq 14$

b) Soit : $x \in [-6;-4]$ On a alors : $-6 \leq x \leq -4$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J = \left]-\infty;-3\right]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-6;-4]$

Alors : $f(-4) \leq f(x) \leq f(-6)$ et comme :

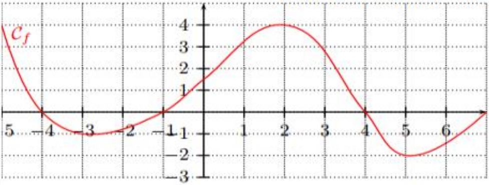
$f(-4) = (-4)^2 + 6\times(-4) - 2 = 16 - 24 - 2 = -10$ Et $f(-6) = (-6)^2 + 6\times(-6) - 2 = 36 - 36 - 2 = -2$

Par suite : $-10 \leq f(x) \leq -2$

D'où : l'expression de $f(x)$ est : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Exercice9 : Soit la fonction définie par la représentions graphique suivante sur l'intervalle : $[-5;7]$

PROF: ATMANI NAJIB



1) Dresser son tableau de variation sur l'intervalle : $[-5;7]$

2) Déterminer :

a) Le maximum absolu de f sur [−5 ; 7]   b) Le minimum de f sur [−5 ; 7]

c) Le minimum de f sur [−5 ; 2]

3) Etudier le signe de la fonction f sur l'intervalle : $[-5;7]$

Solution : 1) → Cette fonction est décroissante sur [−5 ; −3], croissante sur [−3 ; 2], décroissante sur [2 ; 5], puis croissante [5 ; 7].

→ Ou encore : f est croissante sur [−3 ; 2] et sur [5 ; 7], décroissante sur [−5 ; −3] et sur [2 ; 5].

D'où : son tableau de variation sur l'intervalle : $[-5;7]$ est :

x	-5		-3		2		5		7
$f(x)$	4	↘	-1	↗	4	↘	-2	↗	0

2) a) Le maximum de f sur [−5 ; 7] est M = 2, atteint pour x = −5 et x = 2.

b) Le minimum de f sur [−5 ; 7] est m = −2, atteint pour x = 5.

c) le minimum de f sur [−5 ; 2] est m = −1, atteint pour x = −3.

Attention : la valeur d'un extremum dépend de l'intervalle.

3) Etudions le signe de la fonction f sur l'intervalle : $[-5;7]$

On réunit au sein d'un tableau appelé tableau de signes les informations concernant le signe de la fonction f, c'est à dire sa position par rapport à l'axe des abscisses

x	-5		-4		-1		4		7
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Exercice 10 Voici le tableau de variation d'une fonction g définie sur l'intervalle [−10 ; 8]

x	-10		-2		1		5		8
g	-15	↗	5	↘	0	↗	10	↘	7

Déterminer le maximum et le minimum de g sur les intervalles suivants :

a) [−10 ; 8]   b) [−10 ; 1]   c) [1 ; 8]

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : a) $[-10\,;8]$:

Sur l'intervalle $[-10\,;8]$: le maximum de g est égal à 10. Il est atteint pour $x = 5$. Le minimum de g est égal à -15. Il est atteint pour $x = -10$.

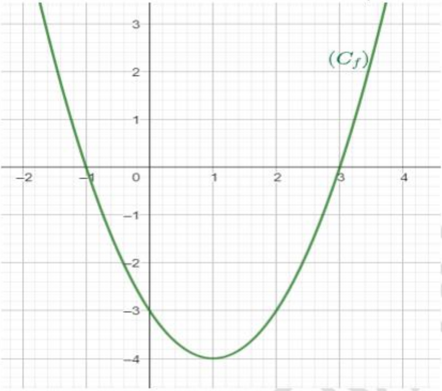
b) $[-10\,;1]$:

Sur l'intervalle $[-10\,;1]$: le maximum de g est égal à 5. Il est atteint pour $x = -2$. Le minimum de g est égal à -15. Il est atteint pour $x = -10$.

c) $[1\,;8]$:

Sur l'intervalle $[1\,;8]$: le maximum de g est égal à 10. Il est atteint pour $x = 5$. Le minimum de g est égal à 0. Il est atteint pour $x = 1$.

Exercice11 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par la représentions graphique suivante



PROF: ATMANI NAJIB

1) Calculer : $f(3)$; $f(0)$ et $f(1)$

2) Dresser son tableau de variation de f

3) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $f(x) < 0$ b) $xf(x) \geq 0$

4) Déterminer l'expression de $f(x)$ parmi les expressions suivantes :

$$f(x) = 6x^2 - 2x \;;\; f(x) = x^2 - 2x - 3 \;;\; f(x) = \sqrt{x-3} \;;\; f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Solutions :

1) Calcul de : $f(3)$; $f(0)$ et $f(1)$

$f(3) = 0$; $f(0) = -3$ et $f(1) = -4$

2) Le tableau de variation de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-4	↗

3) a) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)<0$

Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses. D'où : $S=]-1;3[$

b) Résolution graphique de l'inéquation : $xf(x)\geq 0$

$xf(x)\geq 0$ Signifie que x et $f(x)$ ont le même signe

D'où : $S=[-1;0]\cup[3;+\infty[$

1) La courbe de f c'est une parabole donc : soit $f(x)=6x^2-2x$ ou $f(x)=x^2-2x-3$

Mais : $f(1)=6\times 1^2-2\times 1=4$ or $f(1)=-4$

Exercice12 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ tel que : $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}$

1) Montrer que -1 est le minimum absolu de f

2) Montrer que la fonction f n'est pas majorée.

Exercice13 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}-2}{\sqrt{|x|}+2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité.

2) Etudier les variations de f.

3) a) Montrer que pour tout x dans IR on a : $-1\leq f(x)<1$

b) Montrer que -1 est le minimum absolu de f, et que f n'admet pas de maximum absolu.

Exercice14: Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{x-1}$;(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ 1) Déterminer D_f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que $x_1\neq x_2$

3) Dresser son tableau de variation de f

4)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques

5 Tracer la courbe (C_f)

6) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{x}{|x|-1}$ a) Déterminer D_g

b) Montrer que : g est impaire

c) Montrer que : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$

d) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g et tracer (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

e) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-m|x|+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1(x_2-1)-x_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1x_2-x_1-x_1x_2+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-x_1+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

3) Tableau de variation :

a) sur $]1;+\infty[$ soient $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\succ 1$ et $x_2\succ 1$ Donc $x_1-1\succ 0$ et $x_2-1\succ 0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1)\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}\leq 0$ sur $]1;+\infty[$

D'où f est décroissante sur $]1;+\infty[$

b) Sur $]-\infty;1[$ soient $x_1\in]-\infty;1[$ et $x_2\in]-\infty;1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec 1$ et $x_2\prec 1$ Donc $x_1-1\prec 0$ et $x_2-1\prec 0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1)\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}\leq 0$ sur $]-\infty;1[$ D'où f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$

Résumé : tableau de variation :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

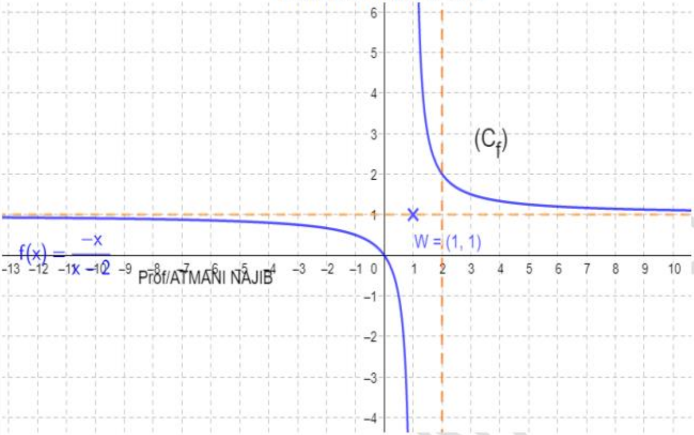
4)Déterminons la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques on utilisant un résumé de notre cours :

Si : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $W\left(\dfrac{1}{1};\dfrac{1}{1}\right)$ c'est à dire : $W(1;1)$ d'asymptotes les droites d'équations : $x=\dfrac{1}{1}=1$ et $y=\dfrac{1}{1}=1$

5) La courbe (C_f) :

PROF. ATMANI NAJIB



6) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{x}{|x|-1}$

On a $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|-1\neq 0$

Signifie $|x|\neq 1$ c'est-à-dire : $x\neq 1$ et $x\neq -1$

Par suite : $D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

b) Montrons que g est impaire :

☞ $x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ Signifie $x\neq 1$ et $x\neq -1$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq -(-1)$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq 1$

Signifie $-x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $g(-x)=\frac{-x}{|-x|-1}=\frac{-x}{|x|-1}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $g(-x)=-\frac{x}{|x|-1}=-g(x)$ par suite : g est impaire

c) Montrons que : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$

PROF. ATMANI

Soit : $x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$ donc : $x \geq 0$

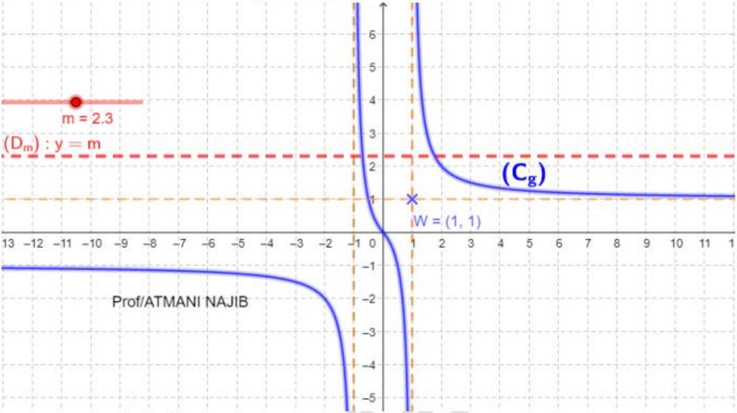
Donc : $|x| = x$ par suite : $g(x) = \frac{x}{|x|-1} = \frac{x}{x-1} = f(x)$

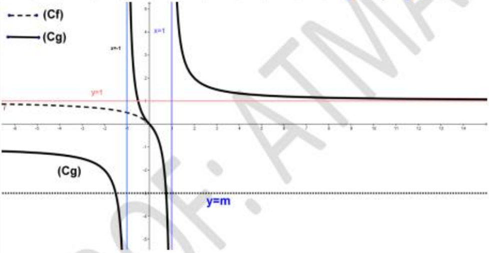
d) On a : $g(x) = f(x)$ Pour tout $x \in [0;1[\cup]1;+\infty[$

Donc : $(C_g) = (C_f)$ sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$

Et puisque g est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

d) La courbe représentative de (C_f) et de (C_g) :





PROF: ATM

e) Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x - m|x| + m = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$

$x - m|x| + m = 0$ Signifie $x = m|x| - m$

Signifie $x = m(|x| - 1)$

Signifie $m=\frac{x}{|x|-1}=g(x)$

Signifie $g(x)=m$

Donc : le nombre de solutions de l'équation est le nombre de points d'intersections de (C_g) et la droite : $y=m$

Si : $-1\leq m\leq 1$ il y'a une seule solution

Si : $m\succ 1$ ou $m\prec 1$ il y'a deux solutions

Exercice15: Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x|x|-2x+2$

1) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
$-x|x|+2x-2+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

3) Résoudre graphiquement l'inéquation : $1\leq f(x)\leq 3$.

Solution :1) a) ☞ sur $\mathbb{R}^+$:

Soit : $x\in\mathbb{R}^+$ alors : $|x|=x$

Donc : $f(x)=x^2-2x+2$:f est une fonction polynôme : $(f(x)=ax^2+bx+c)$

On a : $a=1$; $b=-2$ et $c=2$

Donc : $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times 1}=1$ et $f(1)=1^2-2\times 1+2=1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une partie de la parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

b) ☞ sur $\mathbb{R}^-$:

Soit : $x\in\mathbb{R}^-$ alors : $|x|=-x$

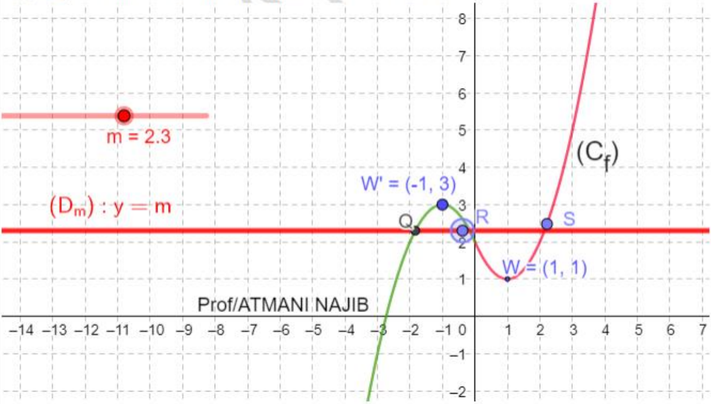
Donc : $f(x)=-x^2-2x+2$:f est une fonction polynôme : $(f(x)=ax^2+bx+c)$

On a : $a=-1$; $b=-2$ et $c=2$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $f(-1)=-(-1)^2-2\times(-1)+2=3$

Alors : la courbe (C_f) c'est une partie de la parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(-1;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=-1$

ATMANI NAJIB



2) Résolution graphique de l'équation $-x|x|+2x-2+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$:

$-x|x|+2x-2+m=0$ Signifie $m=x|x|-2x+2$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si: $m>3$ ou $m<1$ il y'a une solution

Si: $m=3$ ou $m=1$ il y'a deux solutions

Si: $1<m<3$ il y'a une trois solutions

3) Résolution graphique de l'inéquation : $1\leq f(x)\leq 3$

$1\leq f(x)\leq 3$ Signifie (C_f) comprise entre les droites : $y=1$ et $y=3$

On va résoudre d'abord l'équation : $f(x)=3$

☞ Sur $\mathbb{R}^+$: $f(x)=3$ Signifie que : $(x-1)^2+1=3$

Signifie $(x-1)^2=2$ Signifie que : $x-1=\sqrt{2}$ ou $x-1=-\sqrt{2}$

Signifie $x=\sqrt{2}+1$ ou $x=-\sqrt{2}+1\notin\mathbb{R}^+$

Signifie $x=\sqrt{2}+1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$: $f(x)=3$ Signifie $-(x+1)^2+3=3$

Signifie $-(x+1)^2=0$

Signifie $x=-1$

On va aussi résoudre l'équation : $f(x)=1$

ATMANI NAJIB

☞ Sur $\mathbb{R}^+$: $f(x)=1$ Signifie $(x-1)^2+1=1$

Signifie $(x-1)^2=0$ Signifie $x=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$: $f(x)=1$ Signifie $-(x+1)^2+3=1$ Signifie $-(x+1)^2=-2$ Signifie $(x+1)^2=2$

Signifie $x+1=\sqrt{2}$ ou $x+1=-\sqrt{2}$ Signifie $x=\sqrt{2}-1\notin\mathbb{R}^-$ ou $x=-\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}^-$ Signifie $x=-\sqrt{2}-1$

Par suite : $1\le f(x)\le 3$ Signifie $-\sqrt{2}-1\le x\le 1+\sqrt{2}$

Finalement : $S=\left[-\left(\sqrt{2}+1\right);1+\sqrt{2}\right]$

Exercice16 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{-2|x|+1}{|x|-2}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé

1) Vérifier que (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés

2) Etudier les variations de f sur $]2;+\infty[$ et en déduire les variations de f dans $]-\infty;-2[$

4) Soit g une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ tel que : $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-4x^3+1}{x^3-1}\right)$

a) Vérifier que : $g(x)=f\left(2x^3\right)$; $\forall x\in\,]1;+\infty[$

b) En déduire les variations de g dans $]1;2]$

Solution :1) Vérifions que (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés

Etudions la parité de f

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|-2\ne 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|\ne 2\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\ne -2 \text{ et } x\ne 2\}=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

- si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$

- $f(-x)=\dfrac{-2|-x|+1}{|-x|-2}=\dfrac{-2|x|+1}{|x|-2}=f(x)$ C'est à dire : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

Par suite : (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés

2) Etudions les variations de f sur $]2;+\infty[$

Soit : $x\in\,]2;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{-2|x|+1}{|x|-2}=\dfrac{-2x+1}{x-2}$

En générale si : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\ne 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x-2}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $C(2;-2)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=2$ et $y=-2$

$f(x)=\dfrac{-2x+1}{x-2}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3>0$

Donc : f est strictement croissante sur : $]2;+\infty[$

Et comme f est une fonction paire alors : f est strictement décroissante sur : $]-\infty;-2[$

4) Soit g une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ tel que : $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-4x^3+1}{x^3-1}\right)$

a) Vérifions que : $g(x)=f(2x^3)$; $\forall x\in]1;+\infty[$

Soit : $x\in]1;+\infty[$: $f(2x^3)=\dfrac{-2\times 2x^3+1}{2x^3-2}=\dfrac{-4x^3+1}{2x^3-2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{-4x^3+1}{x^3-1}=g(x)$

Donc : $g(x)=f(2x^3)$; $\forall x\in]1;+\infty[$

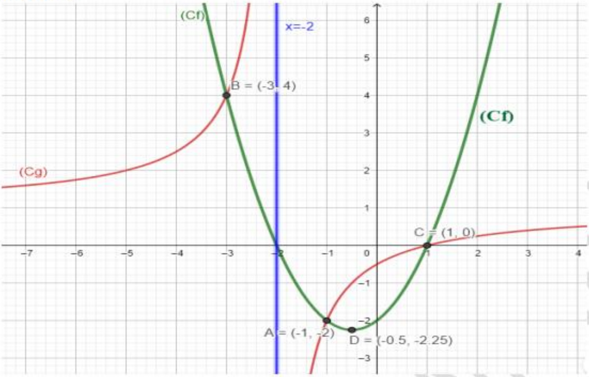
b) Déduisons les variations de g dans $]1;2]$

Soit $x\in]1;2]$ donc : $g(x)=f(2x^3)$

On pose : $h(x)=2x^3$ donc : $g(x)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$

Puisque h est croissante sur $]1;2]$ et $h(]1;2])=]2;16]$ et f est croissante sur $]2;16]$ alors $g=f\circ h$ est croissante sur $]1;2]$

Exercice17 : Soient f et g deux fonctions définies par Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) si dessous :



1) Déterminer D_f et D_g 2) On pose : $f(x)=ax^2+bx+c$ et $g(x)=\dfrac{x+\alpha}{x+2}$

Graphiquement : a) Déterminer les points d'intersections de (C_f) et (C_g)

b) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$ c) Résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$

d) Déterminer les variations de f et g

d) Déterminer : $f(]-\infty;-1])$; $f\left(\left]-1;-\frac{1}{2}\right]\right)$; $f\left(\left[-\frac{1}{2};0\right[\right)$; $f(]0;+\infty[)$

3)Montrer que : $f(x)=x^2+x-2$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$

5) Déterminer : $D_{g\circ f}$ et les variations de $g\circ f$

Solution :1) a) $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) a) Graphiquement les points d'intersections de (C_f) et (C_g) sont : $A(1;0);B(-1;-2);B(-3;4)$

2) b) Pour déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ et $x=-1$ et $x=-3$ par suite : $S=\{-3;-1;1\}$

c) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-\infty;-3[\cup]-2;-1[\cup]1;+\infty[$

Donc : $S=]-\infty;-3[\cup]-2;-1[\cup]1;+\infty[$

---

d) Déterminons les variations de f et g :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-9/4$	↗

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

d) Graphiquement :

$f(]-\infty;-1])=]-2;+\infty[$; $f\left(\left]-1;-\frac{1}{2}\right]\right)=\left[-\frac{9}{4};-2\right[$; $f\left(\left[-\frac{1}{2};0\right[\right)=\left[-\frac{9}{4};-2\right]$; $f(]0;+\infty[)=]-2;+\infty[$

3)a) Montrons que : $f(x)=x^2+x-2$

Puisque : $f(0)=-2$ alors : $c=-2$

Puisque : $f(1)=0$ et $f(-2)=0$ alors : $\begin{cases}a+b-c=0\\4a-2b-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\4a-2b=2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

D'où : $f(x)=x^2+x-2$

b) Montrons que : $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$

On a : $g(x)=\frac{x+\alpha}{x+2}$ et puisque : $g(1)=0$ alors : $\frac{1+\alpha}{3}=0\Leftrightarrow\alpha=-1$ d'où : $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$

5) Déterminons : $D_{g\circ f}$ et les variations de $g\circ f$

PROF: ATMANI NAJIB

a) $D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g\right\}$

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in\mathbb{R}\ et\ \ x^2+x-2\neq -2\right\}$

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in\mathbb{R}\ et\ \ x^2+x\neq 0\right\}$

$D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-1;0\right\}$

b) Etude des variations de : $g\circ f$

- Puisque f est décroissante sur $]-\infty;-1[$ et $f(]-\infty;-1])=]-2;+\infty[$ et g est croissante sur $]-2;+\infty[$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $]-\infty;-1[$

Remarque : On ne peut pas étudier $g\circ f$ sur : $]-1;0[$ car f n'est pas monotone sur $]-1;0[$

- Puisque f est décroissante sur $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ et $f\left(\left]-1;-\frac{1}{2}\right]\right)=\left[-\frac{9}{4};-2\right[$ et g est croissante sur $\left[-\frac{9}{4};-2\right[$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$
- Puisque f est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};0\right[$ et $f\left(\left[-\frac{1}{2};0\right[\right)=\left[-\frac{9}{4};-2\right]$ et g est croissante sur $\left[-\frac{9}{4};-2\right[$ alors $g\circ f$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};0\right[$
- Puisque f est croissante sur $]0;+\infty[$ et $f(]0;+\infty[)=]-2;+\infty[$ et g est croissante sur $]-2;+\infty[$ alors $g\circ f$ est croissante sur $]0;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice18 : Soient f et g les deux fonctions définies par :

$g(x)=\frac{x+4}{x+2}$ et $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$ avec (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g et déterminer la nature de (C_f) et (C_g) en déterminant les éléments caractéristiques

2) Trouver les points d'intersections de la courbe (C_g) avec les axes du repère

3) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}\ \ f(x)=g(x)\Leftrightarrow(x+1)^2(x-2)=0$

b) Déduire les points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

c)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Résoudre graphiquement l'inéquation : $(x-1)^2\geq\frac{4}{x+2}$

4) Soit F la fonction définie par : $F(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x-3}$

a) Déterminer le domaine de la fonction F et vérifier que : $F(x)=(f\circ h)(x)$ avec : $h(x)=\sqrt{x-3}$

PROF: ATMANI NAJIB

b) Etudier les variations de : F sur $[4,+\infty[$

Solution : $g(x)=\frac{x+4}{x+2}$ et $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$

1)a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$; f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=\frac{1}{2}>0$ et $b=-1$ et $c=\frac{3}{2}$ donc : $\alpha=-\frac{-(-1)}{2\frac{1}{2}}=1$ $f(1)=1$

La courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$; $S(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$

C'est-à-dire : $x=1$

Tableau de variations de f : On a $a=\frac{1}{2}>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

b) $g(x)=\frac{x+4}{x+2}$: on a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2<0$

(C_g) Est l'hyperbole de centre $W(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=-2$ et $y=1$.

Donc le tableau de variations de g

---

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	↘	‖	↘

2) Déterminons les points d'intersections de la courbe (C_g) avec les axes du repère

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$: $g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+2}=0 \Leftrightarrow x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$

Donc : la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses en $A(-4;0)$

On a : $g(0)=\frac{0+4}{0+2}=\frac{4}{2}=2$

Donc : la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées en $B(0;2)$

3) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ $f(x)=g(x)\Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=\frac{x+4}{x+2}\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3}{2}-\frac{x+4}{x+2}=0$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=\frac{x+4}{x+2}\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^2-2x+3)-2(x+4)}{2(x+2)}=0\Leftrightarrow x^3-2x^2+3x+2x^2-4x+6-2x-8=0$

PROF. ATMANI NAJIB

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3-3x-2=0$

La division euclidienne de x^3-3x-2 par $x-2$ donne : $x^2+2x+1=(x+1)^2$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}\quad f(x)=g(x)\Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0$

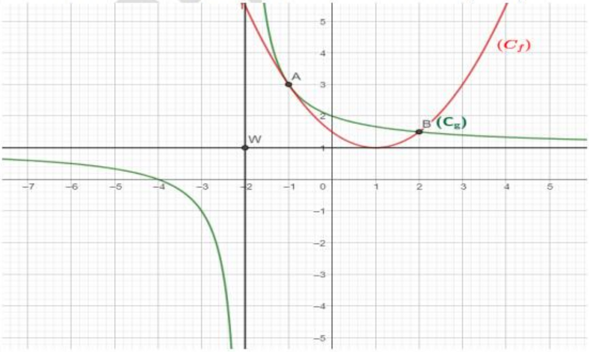
b) Déduisons les points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0\Leftrightarrow x+1=0 \text{ ou } x-2=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ou } x=2$

(C_f) et (C_g) se coupent en : $A(-1;3)$ et $B\left(2;\frac{3}{2}\right)$ car $f(-1)=3$ et $f(2)=\frac{3}{2}$

Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\{A;B\}$

c) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



---

3) Résoudre graphiquement l'inéquation : $(x-1)^2\geq\frac{4}{x+2}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$: $(x-1)^2\geq\frac{4}{x+2}\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq\frac{4}{x+2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\geq\frac{2}{x+2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}+1\geq\frac{2}{x+2}+1$

$(x-1)^2\geq\frac{4}{x+2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}\geq\frac{2+x+2}{x+2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}\geq\frac{x+4}{x+2}\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in[2;+\infty[$

Donc : $S=[2;+\infty[$

4) Soit F la fonction définie par : $F(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x-3}$

a) Déterminons le domaine de la fonction F et vérifions que : $F(x)=(f\circ h)(x)$ avec : $h(x)=\sqrt{x-3}$

$x\in D_F\Leftrightarrow x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3\Leftrightarrow x\in[3,+\infty[$

Donc : $D_F=[3,+\infty[$

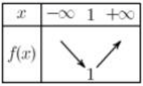
Soit $x\in[3,+\infty[$: $F(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x-3}\right)^2+\frac{3}{2}-\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x-3}\right)^2-\sqrt{x-3}+\frac{3}{2}=f(\sqrt{x-3})$

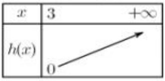
Donc : $F(x)=f\left(h(x)\right)=(f\circ h)(x)$; $\forall x\in[3,+\infty[$

b) Etudions les variations de : F sur $[4,+\infty[$

Sur $[4,+\infty[$: On a $F(x)=f\left(h(x)\right)=(f\circ h)(x)$

Tableau de variations de f : Tableau de variations de h:





Puisque h est croissante sur $[4,+\infty[$ et $\forall x\in[4,+\infty[: h(x)\in[1;+\infty[$ et f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors : F est croissante sur $[4,+\infty[$

Exercice19 : Soit la fonction f définie par : $\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=E(x)+E(-x)$

1) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

2) Simplifier l'expression de : $f(x)$ sur l'intervalles : $I_1=[0;1[$

3) En déduire l'expression de : $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$ et $x-1\in\mathbb{R}$
- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+1)=E(x+1)+E(-x-1)=E(x)+1+E(-x)-1=E(x)+E(-x)=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

2) L'expression de : $f(x)$ sur l'intervalles : $I_1=[0;1[$

Si $x\in]0;1[\Leftrightarrow 0\prec x\prec 1$ alors : $E(x)=0$

$0\prec x\prec 1\Leftrightarrow -1\prec x\prec 0$ Donc : $-1\prec x\leq -1+1$ alors : $E(-x)=0$

Donc : $f(x)=0+-1=-1$

Si $x=0$ alors : $f(0)=E(0)+E(-0)=0+0=0$ $E(x)=0$

D'après ce qui précède : $\begin{cases} f(x)=-1 & si \quad 0\prec x\prec 1 \\ f(x)=0 & si \quad x=0 \end{cases}$

2) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors : $\begin{cases} f(x)=-1 & si \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z} \\ f(x)=0 & si \quad x\in\mathbb{Z} \end{cases}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI N