http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°12 : Généralités sur les fonctions

PROF. ATMANI NAJIB

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{7x-3}{2x^2-3x+\frac{9}{8}}$ 2) $f(x)=\frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$ 3) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$ 4) $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2-4x+6}}{2x-1}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{7x-3}{2x^2-3x+\frac{9}{8}}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+\frac{9}{8}\neq 0\right\}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$: a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{4}\right\}$

Donc : $D_f=\left]-\infty;-4\right]\cup\left]-1;+\infty\right[$

2) $f(x)=\frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+2|x|-3\neq 0\right\}$

$x^2+2|x|-3=0\Leftrightarrow |x|^2+2|x|-3=0$ On pose $|x|=X$ donc l'équation devient : $X^2+2X-3=0$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et ses solutions sont :

$X_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=1$

Donc on a : $|x|=-3$ et $|x|=1$

$|x|=-3$ n'a pas de solution et $|x|=1\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

3) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x+1}{x}\geq 0\ \ et\ \ x\neq 0\right\}$

Dressons un tableau de signe de : $\frac{x+1}{x}$

$x+1=0$ Signifie que : $x=-1$

D'où : $D_f=\left]-\infty;-1\right]\cup\left]0;+\infty\right[$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

4) $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2-4x+6}}{2x-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 4x + 6 \geq 0 \;\; et \;\; 2x - 1 \neq 0 \;\}$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6 donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x^2-4x+6$	$+$

Par suite : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \; 2x - 1 \neq 0 \;\}$

Donc : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{2} \;\right\}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice 2 : Soit f la fonction numérique tel que : $f(x) = \dfrac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$

Etudier la position de la courbe de f par rapports à l'axe des abscisses

Solution : Etudions le signe de le fonction f

$4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \;\; x \neq -\frac{1}{2}$ et $\;\; x \neq \frac{1}{2}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$f(x) \geq 0 \;\; \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2}; 2\right]$; Donc $f \geq 0$ sur : $\left]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2}; 2\right]$

$f(x) \leq 0 \;\; \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[\cup [2; +\infty[$

Donc : $\rightarrow (C_f)$ est au-dessus de l'axe des abscisses si $x \in \left]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2}; 2\right]$

$\rightarrow (C_f)$ est au-dessous de l'axe des abscisses si $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[\cup [2; +\infty[$

Exercice3 : La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6; 7]$

Répondre par lecture graphique :

1) Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?

2) Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?

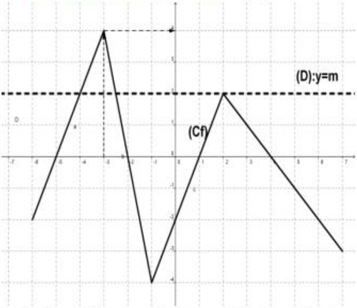
3) Résoudre graphiquement $\;f(x) = 0$

PROF: ATMANI NAJIB

4) Quel est en fonction de m le nombre de solutions de : $f(x)=m$.

5) Résoudre graphiquement $f(x)\prec 0$

6) Résoudre graphiquement $f(x)\geq 2$



Solution :1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5)
Image de -3 est 4 et l'image de 0 est -2 et l'image de 6 est -2

2) Antécédents de -1 sont : -5,5 ;-1,75 ; 0,5 et 5 et Antécédents de 0 sont : -5 ; -2 ; 1 et 4.

3) L'ensemble des solutions est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{-5;-2;1;4\}$

4) Nombre de solutions de $f(x)=m$ c'est le nombre de points d'intersections de la courbe avec la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m\prec -4$: pas de solution
Si $m=-4$: une solution
Si: $-4\prec m\prec -3$ deux solutions
Si $-3\prec m\prec -2$: trois solutions
Si $-2\prec m\prec 2$: quatre solutions
Si $m=2$: trois solutions
Si: $2\prec m\prec 4$ deux solutions
Si $m=4$:une solution
Si $m\succ 4$: pas de solution

5) $f(x)\prec 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses. $S=[-6;7]\cup]-2;1[\cup]4;7]$

6) $f(x)\geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y=2$ Donc : $S=[-4;2.5]\cup\{2\}$

Exercice4 : Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

1) Déterminer D_g.

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de g entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$.

PROF . ATMANI NAJIB

3) Etudier les variations de g sur les intervalles $I = \left]-\infty;-1\right[$ et $J = \left]-1;+\infty\right[$.

4) Dresser son tableau de variation de f.

5) En déduire une comparaison des nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Solution : 1) On a $g(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à: $x+1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq -1$

Donc $D_g = \mathbb{R}-\{-1\}$

2) Soient $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tq $x_1\neq x_2$: On a : $T(x_1;x_2)=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

3) a) Sur $I=\left]-\infty;-1\right[$

Soit $x_1\in\left]-\infty;-1\right[$ et $x_2\in\left]-\infty;-1\right[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec -1$ et $x_2\prec -1$ Donc $x_1+1\prec 0$ et $x_2+1\prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $I=\left]-\infty;-1\right[$

D'où : g est strictement croissante sur $I=\left]-\infty;-1\right[$

b) Sur $J=\left]-1;+\infty\right[$

Soit $x_1\in\left]-1;+\infty\right[$ et $x_2\in\left]-1;+\infty\right[$ $x_1\neq x_2$

Donc : $x_1\succ -1$ et $x_2\succ -1$ Donc $x_1+1\succ 0$ et $x_2+1\succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $J=\left]-1;+\infty\right[$

D'où : g est strictement croissante sur $J=\left]-1;+\infty\right[$

4) Résumé : tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

5) On a $-\sqrt{2}\in\left]-\infty;-1\right[$ et $-\sqrt{3}\in\left]-\infty;-1\right[$ et $-\sqrt{3}<-\sqrt{2}$

D'après le tableau de variation de g on a : g est strictement croissante sur $J=\left]-1;+\infty\right[$

Alors : $g(-\sqrt{3})<g(-\sqrt{2})$

Donc : $\dfrac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}<\dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+1}$ alors : $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice5 : On considère les fonctions : $f : x \to f(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $g : x \to g(x) = \frac{1}{x+1}$.

Le but de l'exercice est d'étudier la position relative de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) Montrer que, pour tout nombre x réel : $x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2+2x+2)$

3) Montrer que pour tout nombre x réel : $x^2+2x+2 = (x+1)^2 + 1$ et en déduire le signe de l'expression : x^2+2x+2

4) A l'aide de ce qui précède, déterminer la position relative des courbes (C_f) et (C_g)

Solution : 1) Dans l'expression de $f(x)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle :

Donc $D_f = \mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+1=0$ soit $x=-1$

Donc, $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

2) Pour tout x réel : $(x-1)(x^2+2x+2) = x^3+2x^2+2x-x^2-2x-2 = x^3+x^2-2$

3) Pour tout x réel : $(x+1)^2+1 = x^2+2x+1+1 = x^2+2x+2$ $(x+1)^2 \geq 0$ pour tout nombre x réel :

Donc $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1 \succ 0$ ainsi x^2+2x+2 est toujours strictement positif.

4) Pour comparer les positions des courbes (C_f)

et (C_g), on étudie le signe de : $f(x)-g(x)$: $f(x)-g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3+x^2-2}{2(x+1)} = \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$

Donc, d'après de ce qui précède on a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+2x+2		$+$		$+$		$+$	
$2(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

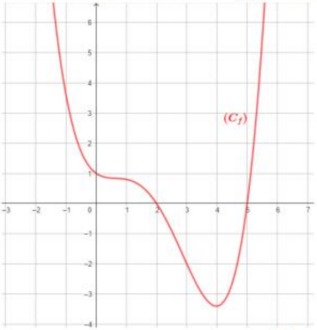
Ainsi (C_f) est au-dessus de (C_g) lorsque : $x \in]-\infty;-1[\cup [1;+\infty[$

Et (C_f) au-dessous de (C_g) lorsque : $x \in]-1;1]$ et les deux courbes se coupent en : $x=1$.

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice6 : Soit si dessous : (C_f) La courbe représentative d'une fonction f



Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{f(x)}{x^2-x-2}<0$

Solution : Etudions le signe de : $\frac{f(x)}{x^2-x-2}$

$x^2-x-2=0$ $\Delta=1+8=9$: $x_1=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2$ et $x_1=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=2\ ou\, x=5$ et $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[2;5]$

Voici donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f(x)$		+		+	0	−	0	+	
$x2-x-2$		+	0	−	0	+		+	
$Q(x)$		+	‖	−	‖	−	0	+	

Donc : $S=]-1;2[\cup]2;5[$

Exercice7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que $\frac{1}{2}$ est la valeur minimale absolue de f

3) a) Démontrer que f est majorée par $\frac{3}{2}$ et est-ce que $\frac{3}{2}$ est une valeur maximale absolue de f ?

b) Que peut-on dire de la fonction f ?

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$\Delta=0-4=-4<0$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$:

PROF ATMANI NAJIB

$$f(x)-\frac{1}{2}=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2}=\frac{2x^2+2x+2-1(x^2+1)}{2(x^2+1)}=\frac{x^2+2x+1}{2(x^2+1)}=\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}\geq 0 \quad \text{car } x^2+1>0$$

Par suite f est minorée sur $\mathbb{R}$ par : $m=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}=0\Leftrightarrow(x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$$

Donc : l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(-1)=\frac{1}{2}$ donc : $f(x)\geq f(-1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(-1)=\frac{1}{2}$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

3) a)Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-\frac{3}{2}=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-\frac{3}{2}=\frac{2x^2+2x+2-3(x^2+1)}{2(x^2+1)}=\frac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)}=\frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}\leq 0 \quad \text{car } x^2+1>0$$

Par suite f est majorée sur $\mathbb{R}$ par : $M=\frac{3}{2}$

$$f(x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow f(x)-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$$

Donc : l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(1)=\frac{3}{2}$ donc : $f(x)\leq f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(1)=\frac{3}{2}$ est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

b) Conclusion : $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq\frac{3}{2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice8 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{x\sin x}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par $-\frac{1}{2}$ et majorée par $\frac{1}{2}$

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$\Delta=0^2-4=-4<0$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrons que :

Il suffit de montrer que : $|f(x)|\leq\frac{1}{2}$?

PROF: ATMANI NAJIB

Soit $x \in \mathbb{R}$: $|f(x)| = \left|\frac{x\sin x}{x^2+1}\right| = \frac{|x\sin x|}{|x^2+1|} = \frac{|x||\sin x|}{|x^2+1|} = \frac{|x|}{x^2+1}|\sin x|$ car $x^2+1 \succ 0$

Or on sait que : $|\sin x| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq \frac{|x|}{x^2+1}$

Donc : $|f(x)| \leq \frac{|x|}{|x|^2+1}$: Montrons que : $\frac{|x|}{|x|^2+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $\frac{1}{2} - \frac{|x|}{|x|^2+1} = \frac{|x|^2 - 2|x| + 1}{|x|^2+1} = \frac{(|x|-1)^2}{|x|^2+1} \geq 0$

Donc : $\frac{|x|}{|x|^2+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Par suite : $|f(x)| \leq \frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$: $\forall x \in \mathbb{R}$

Alors : $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice9 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (4x+3)^2 \leq 25(x^2+1)$

2) a) Déduire que : $|f(x)| \leq 5$: $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Que peut-on dire de la fonction f ?

Solution : 1) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$25(x^2+1) - (4x+3)^2 = 25x^2 + 25 - 16x^2 + 24x - 9 = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2 \geq 0$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (4x+3)^2 \leq 25(x^2+1)$

2) a) Déduisons que : $|f(x)| \leq 5$: $\forall x \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$: On a : $f^2(x) = \left(\frac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 = \frac{(4x+3)^2}{x^2+1}$

On a aussi : $(4x+3)^2 \leq 25(x^2+1)$ donc : $\frac{(4x+3)^2}{x^2+1} \leq 25$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f^2(x) \leq 25$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{f^2(x)} \leq \sqrt{25}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $|f(x)| \leq 5$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $|f(x)| \leq 5$ donc : $-5 \leq f(x) \leq 5$; $\forall x \in \mathbb{R}$

On peut donc dire que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice10 : Soit f une fonction numérique définie sur $]2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

1) Etudier le signe de f

2) a) Démontrer que f est majorée par $\dfrac{1}{4}$.

b) Est ce que $\dfrac{1}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution :1) Soit $x\in\,]2;+\infty[$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\succ 0$$

Donc $f(x)\succ 0$ si $x\in\,]2;+\infty[$

2) a) $x\in\,]2;+\infty[$ Montrons que $f(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

soit $x\in\,]2;+\infty[$ donc $x\succ 2$ cad $x+2\succ 4$

Donc : $\sqrt{x+2}\succ 2$ alors : $\sqrt{x+2}+2\succ 4$

Donc : $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\prec\dfrac{1}{4}$ c'est-à-dire : $f(x)\prec\dfrac{1}{4}\ \forall x\in\,]2;+\infty[$

f est donc majorée sur $]2;+\infty[$ par $M=\dfrac{1}{4}$

b) Puisque $f(x)\neq\dfrac{1}{4}\ \forall x\in\,]2;+\infty[$

$\dfrac{1}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exercice11: Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=3x^2-5$. 2) $f(x)=\tan x-2\sin x$ 3) $f(x)=2x^3+x^2$

Solution : 1) $f(x)=3x^2-5$; $D_f=\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}$, alors : $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=3(-x)^2-5=3x^2-5$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire.

2) $f(x)=\tan x-2\sin x$: $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

- $x\in D_f\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x\neq-\dfrac{\pi}{2}-k\pi;k\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x\neq-\dfrac{\pi}{2}-k\pi+\pi;k\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x\neq\dfrac{\pi}{2}+k'\pi,k'\in\mathbb{Z}$

Alors : $x\in D_f\Rightarrow -x\in D_f$

PROF: ATMANI NAJIB

- $f(-x)=\tan(-x)-2\sin(-x)=-\tan x+2\sin x=-(\tan x-2\sin x)$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

---

3) $f(x)=2x^3+x^2$; f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

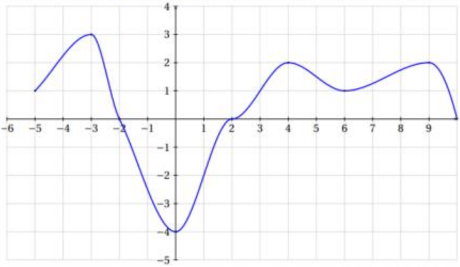
$f(-1)=2(-1)^3+(-1)^2=-2+1=-1$ et $f(1)=2\times1^3+1^2=2+1=3$

On a : $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Donc : $\exists x=1\in\mathbb{R}\ /\ f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

f est une fonction ni paire ni impaire,

Exercice12: À partir de la courbe représentative de la fonction f dresser son tableau de variations



Solution : On obtient le tableau de variations suivant :

x	-5		-3		0		4		6		9		10
$f(x)$	1	↗	3	↘	-4	↗	2	↘	1	↗	2	↘	0

Exercice13 : On considère une fonction f définie sur l'intervalle [−4;5] dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-4		-1		3		5
f	6	↘	0	↗	1	↘	-2

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

Affirmation 1 : $f(4)\geq 0$

Affirmation 2 : La courbe représentant la fonction f coupe l'axe des abscisses en un seul point.

Solution : D'après le tableau de variation on sait que : $-2 \leq f(4) \leq 1$

On ne peut donc pas déterminer le signe de $f(4)$

Affirmation 1 fausse

D'après le tableau de variation on sait que $f(-1)=0$. La courbe représentant la fonction f coupe donc l'axe des abscisses au point d'abscisses −1.
On sait également que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [3;5] et qu'elle prend des valeurs comprises entre −2 et 1. Elle prendra donc une nouvelle fois sur cet intervalle (il faudra attendre 2bac pour avoir une justification précise) la valeur 0.
Affirmation 2 fausse

Exercice14 : Partie A : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x-2$

(C_f) Sa courbe représentative

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ (C_g) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_g

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Déterminer graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $]-1,0]$; $[1;+\infty[$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-3,2$; $-1,2$; $1,2$

Solution : Partie A :1) On a : $f(x)=x^2+2x-2$: f est une fonction polynôme ; donc : $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=1$ et $b=2$ et $c=-2$

Donc $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\times 1}=-1$ et $\beta=f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-2=-3$

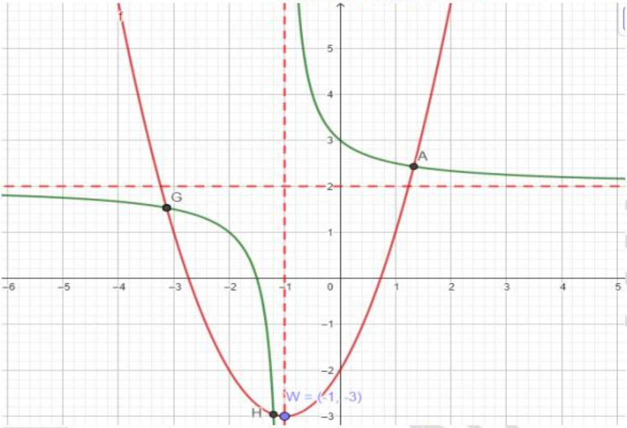
la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-1;-3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

Tableau de variations de f : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

PROF: ATMANI NAJIB

2)



Partie B :**1)** Soit g une fonction numérique : $g(x)=\frac{2x+3}{x+1}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -1\}$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) On utilisant un résumé de notre cours :

Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

1iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ Avec : $a=2$; $b=3$; $c=1$; $d=1$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\frac{1}{1}=-1$ et $y=\frac{2}{1}=2$

PROF: ATMANI NAJIB

$Det(g) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\times1-3\times1=-1<0$

Donc : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

Le tableau de variations de g:

---

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	↘	‖	↘

3) Voir partie1

x	-1	0	1	2
g(x)	▨	3	5/2	7 /3

4) Déterminons graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $]-1,0]$; $[1;+\infty[$

$g(]-1,0])=[3;+\infty[$ et $g\left([1;+\infty[\right)=\left[\frac{5}{2};2\right[$

5) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-1,2$; $-3,2$; $1,2$

(C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]-3,2;-1,2[\cup]-1;1,2[$

Donc : $S=]-3,2;-1,2[\cup]-1;1,2[$

Exercice15 : Soit les fonctions f et g tel que : $f(x)=x^2-2x+3$ et $g(x)=2x+1$

Déterminer : $g\circ f$ et $f\circ g$

Solution : On a : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$ donc $D_{g\circ f}=\mathbb{R}$ et $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2x+3)=2(x^2-2x+3)+1$

$(g\circ f)(x)=2x^2-4x+7$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=(2x+1)^2-2(2x+1)+3$

$(f\circ g)(x)=4x^2+4x+1-4x-2+3=4x^2+2$

Exercice 16 : Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ et $g(x)=\frac{x+2}{x-3}$

1) Déterminer : D_f ; D_g ; $D_{g\circ f}$

2) Déterminer : $(g\circ f)(x)$

Solution : 1) On a $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq-1\}=\mathbb{R}-\{-1\}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-3\neq0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq3\}=\mathbb{R}-\{3\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{3\}$

PROF: ATMANI NAJIB

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_f\ \ et\ \ f(x)\in D_g\right\}$

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq -1\ \ et\ \ f(x)\neq 3\right\}$

$f(x)=3\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1}=3\Leftrightarrow x-1=3x+3\Leftrightarrow -2x=4\Leftrightarrow x=-2$

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq -1\ \ et\ \ x\neq -2\right\}$

Donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\{-2;-1\}$

2) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{-2;-1\}$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)+2}{f(x)-3}=\frac{\frac{x-1}{x+1}+2}{\frac{x-1}{x+1}-3}=\frac{\frac{x-1+2x+2}{x+1}}{\frac{x-1-3x-3}{x+1}}=\frac{\frac{3x+1}{x+1}}{\frac{-2x-4}{x+1}}=-\frac{3x+1}{2x+4}$$

Donc : $(g\circ f)(x)=-\dfrac{3x+1}{2x+4}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2;-1\}$

Exercice17 : Exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

1) $h_1(x)=\dfrac{1}{3x-1}$ 2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$ 3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$

Solution : 1) $h_1(x)=\dfrac{1}{3x-1}$ on a : $h_1(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=3x-1$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$ on a : $h_2(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=x+3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$ on a : $h_3(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=3x+4$

Exercice18 : Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$ et (C_g) La courbe représentative de g

A)1) a) Déterminer la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer le tableau de variation de g

c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

b) Déterminer le signe de : m^2+4m

c) Déterminer les valeurs de m ou la courbe (C_g) coupe la droite d'équation :

$y=x+m$ en deux points

B)1) a) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x+1}$

a) Calculer : $f(x)-f(y)$: $\forall x;y$

b) En déduire la monotonie de f dans: $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

c) Calculer : $f(x)+\dfrac{2}{3}$ puis en déduire son signe

d) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $-\dfrac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

PROF: ATMANI NAJIB

2) On considère la fonction h tel que : $h(x)=\dfrac{x^2-x+1}{2(x-1)^2}$

a) a) Déterminer D_h et vérifier que : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad x\neq 0$

b) Étudier la monotonie de h dans: $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

Solution : A) a) 1) a) Déterminons la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques : $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$

On a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

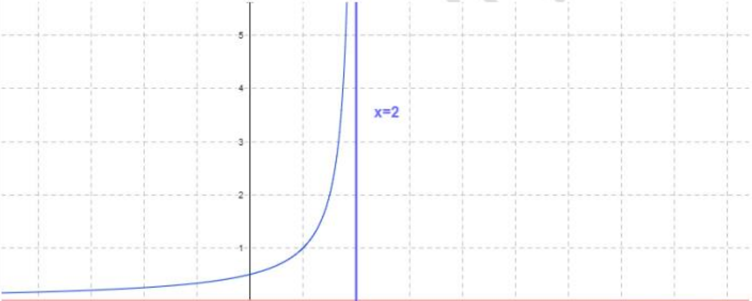
Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

En générale si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

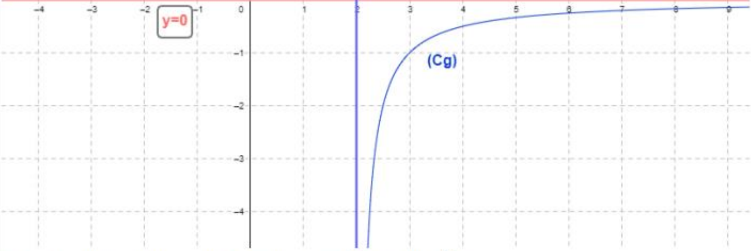
Dans notre exercice on a : $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $W(2;0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=2$ et $y=0$

b) $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$ on a : $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1\succ 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗



NAJIB



B) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

$g(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x}=x \Leftrightarrow x(2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$

Donc : $S_1=\{1\}$

$g(x)=1+x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x}=1+x \Leftrightarrow (1+x)(2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1^2+4=5>0$ et $x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Donc : $S_2=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) Détermination du signe de : m^2+4m

m	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$m2+4m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Détermination des valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points :

Résolution algébrique de l'équation $g(x)=x+m$

$g(x)=x+m \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1}=x+m \Leftrightarrow 2m+2x-x^2-xm=1 \Leftrightarrow x^2+(m-2)x-2m+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(m-2)^2-4\times1\times(-2m+1)=m^2+4m$

Donc : $\Delta=m^2+4m>0 \Leftrightarrow m\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

Donc : l'équation $g(x)=x+m$ admet 2 solutions $\Leftrightarrow m\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

Donc : les valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points sont : $m\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

B)1) a) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$

a) Calculons : $f(x)-f(y)$; $\forall x;y$

ATMANI NAJIB

$$f(x)-f(y)=\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{2y}{y^2-y+1}=\frac{2x(y^2-y+1)-2y(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2\frac{xy^2-xy+x-yx^2+xy-y}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$$

$$=2\frac{xy^2-yx^2+x-y}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2\frac{xy(y-x)-(y-x)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2(y-x)\frac{xy-1}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$$

Donc : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$

b) En déduire la monotonie de f dans: $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

On a : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$ donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$

Pour : x^2-x+1 et y^2-y+1 ; $\Delta=1-4\prec 0$ donc : $x^2-x+1\succ 0$ et $y^2-y+1\succ 0$

Si : $x\in[-1;1]\Rightarrow -1\le x\le 1\Rightarrow |x|\le 1\,(1)$ et $y\in[-1;1]\Rightarrow -1\le y\le 1\Rightarrow |y|\le 1\,(2)$

(1) et $(2)\Rightarrow |x||y|\le 1\Rightarrow |xy|\le 1\Rightarrow -1\le xy\le 1\Rightarrow 0\le 1-xy$

Donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ge 0$ par suite f est croissante sur $[-1;1]$

Si : $x\in[1;+\infty[\Rightarrow x\ge 1\,(1)$ et $y\in[1;+\infty[\Rightarrow y\ge 1\,(2)$

(1) et $(2)\Rightarrow xy\ge 1\Rightarrow 1-xy\le 0$

Donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le 0$ par suite f est décroissante sur $[1;+\infty[$

c) Calcul de : $f(x)+\frac{2}{3}$ puis l'étude de son signe :

$$f(x)+\frac{2}{3}=\frac{2x}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}=\frac{6x+2x^2-2x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2x^2+4x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x^2+2x+1)}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x+1)^2}{3(x^2-x+1)}\ge 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x+1)^2\ge 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)+\frac{2}{3}\ge 0$ c'est-à-dire : $-\frac{2}{3}\le f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

d) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ -\frac{2}{3}\le f(x)\le 2$

On a : $-\frac{2}{3}\le f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$. Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le 2$

$$2-f(x)=2-\frac{2x}{x^2-x+1}=2\left(1-\frac{x}{x^2-x+1}\right)=2\frac{x^2-x+1-x}{(x^2-x+1)}=2\frac{x^2-2x+1}{(x^2-x+1)}=\frac{2(x-1)^2}{(x^2-x+1)}\ge 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x-1)^2\ge 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $2-f(x)\ge 0$ c'est-à-dire : $f(x)\le 2$ ❷ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

❶ et❷ $\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$; $-\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

2) On considère la fonction h tel que : $h(x)=\frac{x^2-x+1}{2(x-1)^2}$

a) Déterminons D_h et vérifions que : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad x\neq 0$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1\}=\mathbb{R}/\{1\}$; On a : $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$ et $g(x)=\frac{1}{2-x}$

Donc : $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{2-\frac{2x}{x^2-x+1}}$; $\forall x\in\mathbb{R}/\{1\}$

$$(g\circ f)(x)=\frac{1}{\frac{2x^2-2x+2-2x}{x^2-x+1}}=\frac{x^2-x+1}{2x^2-2x+2-2x}=\frac{x^2-x+1}{2x^2-4x+2}=\frac{x^2-x+1}{2(x^2-2x+1)}=\frac{x^2-x+1}{2(x-1)^2}=h(x)$$

b) Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[1;+\infty[$ et $[-1;1]$

Puisque f est décroissante sur $[1;+\infty[$ et $f([1;+\infty[)\subset[2;+\infty[$ et g est croissante sur $]2;+\infty[$ alors $g\circ f=h$ est décroissante sur $[1;+\infty[$

Puisque f est croissante sur $[-1;1]$ et $f([-1;1])\subset]-\infty;2[$ et g est croissante sur $]-\infty;2[$ alors $g\circ f=h$ est croissante sur $[-1;1]$

Exercice19 : Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{x+2}$ et $g(x)=\frac{x-3}{x+3}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer D_f et D_g

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) a) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)$

4) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}$: $\forall x\in[-2;+\infty[$

a) Montrer que : h est majoré par 1 et que -1 c'est la valeur maximale absolue de h

b) Étudier les variations de h sur $[-2;+\infty[$

Solution : 1) $f(x)=\sqrt{x+2}$; $g(x)=\frac{x-3}{x+3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+3\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -3\}=\mathbb{R}-\{-3\}=]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$

1) Déterminons les tableaux de variations de f et g

Le tableau de variations de f :

x	-2 $+\infty$
$f(x)$	0 ↗

Le tableau de variations de g :

En générale si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et

d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $g(x)=\frac{x-3}{x+3}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $C(-3;1)$ et

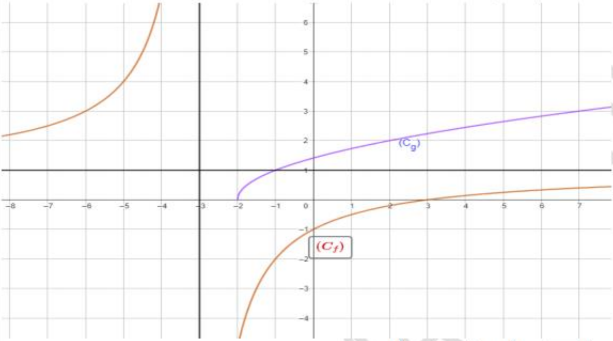
d'asymptotes les droites d'équations $x=-3$ et $y=1$

$g(x)=\frac{x-3}{x+3}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3+3=6>0$

Donc :f est strictement croissante sur : $]-\infty;-3[$ et $]-3;+\infty[$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

3) a) Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



b) Résolvons graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)$

Soit : $x\in[-2,+\infty[$: $x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)\Leftrightarrow x-x\sqrt{x+2}=3+3\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x-3=(x+3)\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\frac{x-3}{x+3}=\sqrt{x+2}$

$x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right) \Leftrightarrow g(x)=f(x)$

Et puisque pas de points d'intersections entre (C_f) et (C_g) alors : $S=\varnothing$

4) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}$: $\forall x \in [-2;+\infty[$

a) →Montrons que : h est majoré par 1 :

Soit : $x \in [-2,+\infty[$: $h(x)-1=\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}-1=\dfrac{\sqrt{x+2}-3-\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}=\dfrac{-6}{\sqrt{x+2}+3}<0$

Donc : h est majoré par 1 :

→Montrons que : -1 c'est la valeur maximale absolue de h

Soit : $x \in [-2,+\infty[$: $h(x)-(-1)=\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}+1=\dfrac{\sqrt{x+2}-3+\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+3}=\dfrac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+3}\geq 0$ et $h(-2)=-1$

Donc : $h(x) \leq h(-2)$: $\forall x \in [-2;+\infty[$

Donc : -1 c'est la valeur maximale absolue de h

b) Etudions les variations de h sur $[-2;+\infty[$: $h=g\circ f$

Puisque f est croissante sur $[-2;+\infty[$ et $f([-2;+\infty[)\subset[0;+\infty[$ et g est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $h=g\circ f$ est croissante sur $[-2;+\infty[$

Exercice20 : Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=\dfrac{5x-11}{4x-4}$ et $g(x)=x^2-2x-1$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Déterminer D_f

c) Trouver les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

2) a) Déterminer a ; b et c tel que : $\forall x \in D_f$: $g(x)-f(x)=\dfrac{(x+1)(ax^2+bx+c)}{4x-4}$

b) Déterminer les points d'intersections de (C_f) et (C_g)

3)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère en précisant les points d'intersections

4)a) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x)>f(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\times g(x)\geq 0$

5) Déterminer : $D_{g\circ f}$ et les variations de $g\circ f$

6) Soit la fonction définie par : $h(x)=|g(x)|$

Tracer La courbes représentatives (C_h) de h dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (avec une autre couleur)

Solution : 1) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation : $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5x-11}{4x-4}=0 \Leftrightarrow 5x-11=0 \Leftrightarrow x=\frac{11}{5}$

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $C\left(\frac{11}{5};0\right)$

b) $f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$; on a $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 4x-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

c) Les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=4+4=8>0$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times1}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times1}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses sont :

$A\left(1+\sqrt{2};0\right)$ et $B\left(1-\sqrt{2};0\right)$.

2) a) Soit $x\in D_f$: $g(x)-f(x)=x^2-2x-1-\frac{5x-11}{4x-4}=\frac{4x^3-12x^2-x+15}{4x-4}=\frac{(x+1)(4x^2-16x+15)}{4x-4}$

Donc : $a=4$; $b=-16$; $c=15$

b) Détermination des points d'intersections de (C_f) et (C_g) :

$M(x;y)\in(C_f)\cap(C_g) \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(4x^2-16x+15)}{4x-4}=0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2-16x+15)=0 \Leftrightarrow 4x^2-16x+15=0$ ou $x=-1$

$\Delta=b^2-4ac=(-16)^2-4\times4\times15=16>0$

$x_1=\frac{-(-16)+\sqrt{16}}{2\times4}=\frac{16+4}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$ et $x_2=\frac{-(-16)-\sqrt{16}}{2\times4}=\frac{16-4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\left\{E\left(\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right);F\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{4}\right);G(-1;2)\right\}$

3)Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

a) $f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$: (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(1;\frac{5}{4}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=\frac{5}{4}$

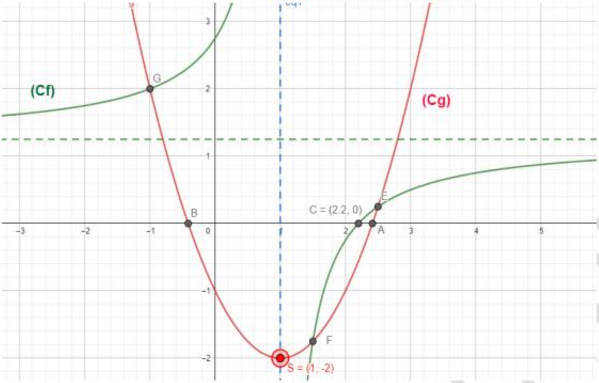
PROF: ATMANI NAJIB

b) On a : $g(x)=x^2-2x-1$: g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=3$ $\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times 1}=1$ et $\left(f(1)=-2\right)$

Donc la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $S(1;-2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$



4)a) Résolution graphique de l'inéquation : $g(x)\succ f(x)$

La courbe $\left(C_g\right)$ est au-dessus de $\left(C_f\right)$ si $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

Donc : $S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

4) b) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)\times g(x)\geq 0$

$f(x)\times g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0 \ \ et \ \ g(x)\geq 0$ ou $f(x)\leq 0 \ \ et \ \ g(x)\leq 0$

$f(x)\geq 0 \ \Leftrightarrow$ La courbe (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses $\Leftrightarrow x\in \left]-\infty;1\right[\cup\left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

$g(x)\geq 0 \ \Leftrightarrow$ La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses $\Leftrightarrow x\in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$

$f(x)\geq 0 \ \ et\, g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(\left]-\infty;1\right[\cup\left[\frac{11}{5};+\infty\right[\right)\cap\left(\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[\right)$

$f(x)\geq 0 \ \ et\, g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};1\right[$

De la même façon : $f(x)\leq 0 \ \ et\, g(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

Donc : $f(x)\times g(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ x\in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{11}{5};+\infty\right[\cup\left]1;1+\sqrt{2}\right]$

5) Détermination de : $D_{g\circ f}$ et les variations de $g\circ f$:

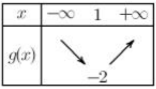
a) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\in D_f \ \ et \ \ f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\neq 1 \ \ et \ \ f(x)\in\mathbb{R}\}$

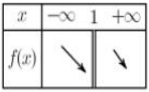
$D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\{1\}$

---

b) Etude des variations de : $g\circ f$:



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	-2	↗



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

Pour l'étude des variations de $g\circ f$ on résoud l'équation : $f(x)=1$

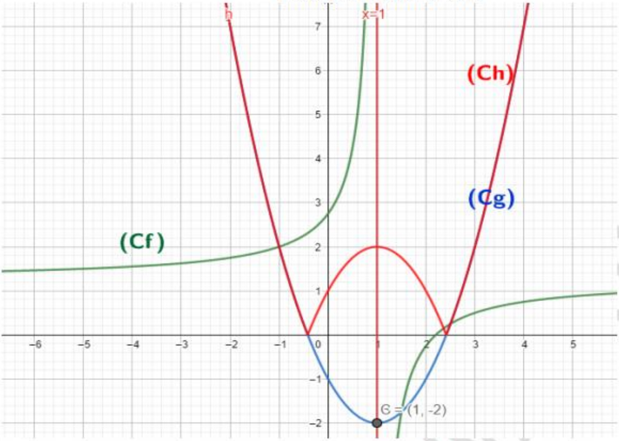
$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{5x-11}{4x-4}=1 \Leftrightarrow 5x-11=4x-4 \Leftrightarrow x=7$

- Puisque f est strictement croissante sur $[7;+\infty[$ et $f([7;+\infty[)=\left[1;\frac{5}{4}\right[$ et g est croissante sur $\left[1;\frac{5}{4}\right[$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $[7;+\infty[$
- Puisque f est strictement croissante sur $]1;7]$ et $f(]1;7])=]-\infty;1]$ et g est décroissante sur $]-\infty;1]$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $]1;7]$
- Puisque f est croissante sur $]-\infty;1[$ et $f(]-\infty;1[)=\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$ et g est croissante sur $\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$ alors $g\circ f$ est croissante sur $]-\infty;1[$

6) On a : $h(x)=|g(x)|$ donc : $\begin{cases} h(x)=g(x) & si\ g(x)\geq 0 \\ h(x)=-g(x) & si\ g(x)\leq 0 \end{cases}$

Donc : Les courbes (C_h) et (C_g) sont confondues si $g(x)\geq 0$ c'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses et Les courbes (C_h) et (C_g) sont symétriques si $g(x)\leq 0$ c'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses(voir figure)

PROF: ATMANI NAJIB



Exercice21 : soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

2) Etudier la parité de f

3) Vérifier que 2π est une période pour la fonction f

4) En déduire un domaine d'étude de f

5) Déterminer les points d'intersections de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

6) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation : $f(x) \geq 0$

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$

Solution :1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - cox \neq 0\}$

$1-\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \cos 0 \Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi$

Donc : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

2) Etude de la parité de f :

a) si $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ c'est-à-dire : $x \neq 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Alors : $-x \neq 2(-k)\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-x \in \mathbb{R} - \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1-\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{1-\cos x} = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc f est impair

3) Vérifions que 2π est une période pour la fonction f

a) Si $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ alors : $2\pi + x \in \mathbb{R} - \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $f(2\pi + x) = \dfrac{\sin(2\pi + x)}{1-\cos(2\pi + x)} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = f(x)$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

4) Un domaine d'étude de f

2π est une période pour la fonction f donc :il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$ par exemple : $D = D_f \cap [-\pi;\pi] = [-\pi;\pi] - \{0\}$

et puisque f est impair il suffit d'étudier f sur $D_E = ([-\pi;\pi] - \{0\}) \cap [0;+\infty[=]0;\pi]$

5) Déterminons les points d'intersections de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{1-\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi \ ou\ x = \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

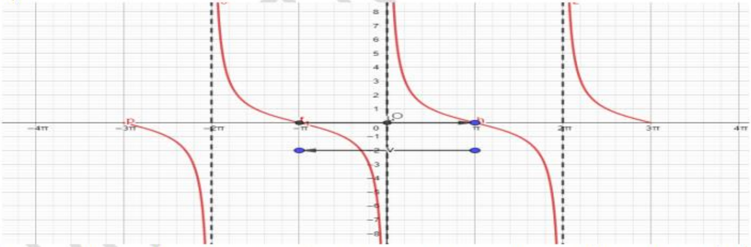
Et puisque $2k\pi \notin D_f$ alors : les points d'intersections de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A_k(\pi + 2k\pi;0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

6) Résolution dans $[0;2\pi[$ de l'inéquation : $f(x) \geq 0$

x	0		π		2π
$sinx$		$+$	0	$-$	
$1-cosx$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Donc : $S =]0;\pi]$

7)



Exercice22 : Considérons la fonction f périodique de période 2 tel que : $f(x) = x-1 \quad \forall x \in [0;2[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;6[$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

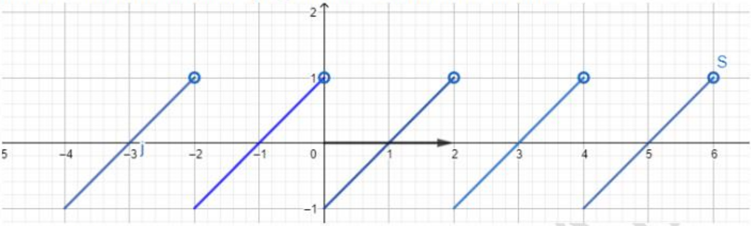
2) Calculer : $f(9)$; $f(-8,5)$; $f(2025)$

3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k = [2k;2(k+1)[\ k \in \mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0 = [0;2[$:

$f(x) = x-1 \quad \forall x \in [0;2[$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;6[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0 = [0;2]$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$



2) →Calculons : $f(9)$

$f(9) = f(8+1) = f(2\times4+1) = f(1)$ car f est une fonction périodique de période $T = 2$

Et puisque : $1\in[0;2[$ alors : $f(9)=f(1)=1-1=0$

$\rightarrow$Calculons : $f(-8,5)$

$f(-8,5)=f(-8-0,5)=f(-0,5)=f(-2\times1+1,5)=f(1,5)$ car f est une fonction périodique de période $T=2$ Et puisque : $1,5\in[0;2[$ alors : $f(-8,5)=f(1,5)=1,5-1=0,5$

$\rightarrow$Calculons : $f(2025)$

$f(2025)=f(2\times1012+1)=f(1)$ car f est une fonction périodique de période $T=2$

Et puisque : $1\in[0;2[$ alors : $f(2025)=f(1)=1-1=0$

3) l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[$ $k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[2k;2(k+1)[\Leftrightarrow 2k\leq x\prec 2(k+1)$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\leq x-2k\prec 2\Leftrightarrow f(x-2k)=f(x)$

$x\in I_k\Leftrightarrow f(x)=x-2k-1$: $k\leq\frac{x}{2}\prec k+1$

Car : $2k\leq x\prec 2(k+1)\Leftrightarrow k\leq\frac{x}{2}<k+1\Leftrightarrow E\left(\frac{x}{2}\right)=k$

Exercice23: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x\times E\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Calculer : $f(2)$; $f(-2025)$; $f\left(-\frac{4}{9}\right)$

2) Déterminer : D_f

3) a) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[$: $1-x\prec f(x)\leq 1$

b) Montrer que : $\forall x\in]-\infty;0[$: $1\leq f(x)\prec 1-x$

c) Donner une valeur simple de $f(x)$ sur $]1;+\infty[$ et sur $]-\infty;-1[$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : 1) Calculer : $f(2)$; $f(2025)$; $f\left(-\frac{4}{9}\right)$

$f(2)=2\times E\left(\frac{1}{2}\right)=2\times0=0$ car $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$ en effet : $0\leq\frac{1}{2}<0+1$

$f(-2025)=-2025\times E\left(-\frac{1}{2025}\right)=-2025\times(-1)=2025$ car $E\left(-\frac{1}{2025}\right)=-1$

en effet : $-1\leq-\frac{1}{2025}<-1+1$

$f\left(-\frac{4}{9}\right)=-\frac{4}{9}\times E\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{4}{9}\times(-3)=\frac{4}{3}$ car $E\left(-\frac{9}{4}\right)=-3$ en effet : $-3\leq-\frac{9}{4}<-3+1$

2) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq0\}=\mathbb{R}-\{0\}$

3) a) Montrons que : $\forall x\in]0;+\infty[$: $1-x\prec f(x)\leq 1$

NAJIB

Soit $x \in]0;+\infty[$; On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x \Rightarrow \frac{1}{x}-1 \prec E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1-x \prec xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

b) Montrons que : $\forall x \in]-\infty;0[$: $1 \leq f(x) \prec 1-x$

Soit $x \in]-\infty;0[$; On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x \Rightarrow \frac{1}{x}-1 \prec E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) \prec 1-x$

c) Soit $x \succ 1 \Rightarrow 0 \prec \frac{1}{x} \prec 1 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow f(x)=x \times E\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Soit $x \prec -1 \Rightarrow -1 \prec \frac{1}{x} \prec 0 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=-1 \Rightarrow f(x)=x \times E\left(\frac{1}{x}\right)=-1$

Exercice24 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=(x-E(x))^2$

1) Montrer que f est bornée
2) a) Vérifier que 1 est une période pour la fonction f
b) En déduire le domaine d'étude de f
3) a) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;1[$
b) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

4)Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=\frac{1}{(x-E(x))^2}$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $E(x)=x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
b) En déduire le domaine d'étude de g
c) Donner le Tableau de variation de g sur : $]-1;1[$
d)Tracer la représentation graphique de la fonction g sur : $[-3;3[$

Solution : $f(x)=(x-E(x))^2$

1) On a : $D_f=\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$; $E(x) \leq x \prec E(x)+1 \Leftrightarrow 0 \leq x-E(x) \prec 1 \Leftrightarrow 0^2 \leq (x-E(x))^2 \prec 1^2$
$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \prec 1$

Donc : f est bornée

2)a) - $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x+1 \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

b) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :
$D_E=D_f \cap [0;1[=\mathbb{R} \cap [0;1[=[0;1[$

3) a) Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;1[$:

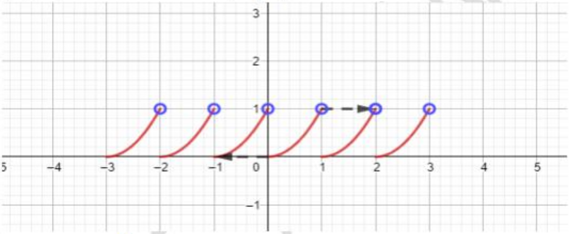
$x \in [0;1[\Leftrightarrow 0 \leq x \prec 1$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $f(x)=(x-E(x))^2=(x-0)^2=x^2$

b) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_1=[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$



4) $g(x)=\dfrac{1}{(x-E(x))^2}$

4)a) $\Rightarrow$) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\;\; E(x)=x\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$

Supposons que : $E(x)=x$ Montrons que : $x\in\mathbb{Z}$

On a : $E(x)$ est un entier relatif intérieur ou égale a x

Donc : $E(x)\in\mathbb{Z}$ et $E(x)=x$ par suite : $x\in\mathbb{Z}$

$\Leftarrow$) Montrons que : $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow E(x)=x$

On a : $E(x)\le x\prec E(x)+1$

Donc : $E(x)\le x\le E(x)$

Donc : $E(x)=x$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$: $E(x)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

b) $D_g=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-E(x)\ne 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,E(x)\ne x\}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Car : $E(x)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

Puisque : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et $f\ge 0$ et croissante sur $I_1=[0;1[$

Alors : g et décroissante sur $I_1=[0;1[$ et g est aussi périodique de de période 1.

$D_E=D_g\cap[0;1[=]0;1[$

c) Le Tableau de variation de g sur : $]-1;1[$

x	-1	0	1
$g(x)$	↘		↘

d)Traçage de la représentation graphique de la fonction g sur : $[-3;3[$

a) Une expression simple de $g(x)$ sur l'intervalle : $]0;1[$:

$x \in]0;1[\Leftrightarrow 0 \prec x \prec 1$

Donc : $g(x) = \dfrac{1}{(x-E(x))^2} = \dfrac{1}{(x-0)^2} = \dfrac{1}{x^2}$

b) Pour Tracer la représentation graphique de la fonction g sur $[-3;3[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $]0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJI