1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°13 : Généralités sur les fonctions

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{-2\sqrt{3-4x}+6}{2x^2-3x+1}$ 2) $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-8x+3}}{x-3}$ 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-8}{x^6-7x^3-8}$

4) $f(x)=\sqrt{6x^3+25x^2+21x-10}$ 5) $f(x)=2026x-5\tan x$

Solution : 1) $f(x)=\frac{-2\sqrt{3-4x}+6}{2x^2-3x+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+1\neq 0\ \ et\ \ 3-4x\geq 0\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-3x+1\neq 0\ \ et\ \ x\leq\frac{3}{4}\right\}$

$2x^2-3x+1=0$: Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1 donc :

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\frac{1}{2}\ \ et\ \ x\neq 1\ \ et\ x\leq\frac{3}{4}\right\}$

$D_f=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$

2) $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-8x+3}}{x-3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,4x^2-8x+3\geq 0\ \ et\ \ x-3\neq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,4x^2-8x+3\geq 0\ \ et\ \ x\neq 3\}$

Étudions le signe du trinôme : $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times 4\times 3=64-48=16>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{8+4}{2\times 4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		+	0	−	0	+	

Donc : $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[-\{3\}$

Par suite : $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};3\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-8}{x^6-7x^3-8}$

PROF: ATMANI NAJIB

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^6 - 7x^3 - 8 \neq 0 \ \ et \ \ x \geq 0 \}$

$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ Signifie que : $(x^3)^2 - 7(x^3) - 8 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^3$; nous obtenons l'équation : $X^2 - 7X - 8 = 0$

Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 81 \succ 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $X_1 = \frac{7-9}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{7+9}{2} = 8$

Donc : $x^3 = -1$ ou $x^3 = 8$.

Equivalent à : $x = -1$ ou $x = 2$

Par suite : $D_f = [0.+\infty[- \{-1;2\}$

Alors : $D_f = [0;2[\cup]2;+\infty[$

4) $f(x) = \sqrt{6x^3 + 25x^2 + 21x - 10}$

(On peut remarquer que : -2 est une racine évidente du polynôme : $6x^3 + 25x^2 + 21x - 10$)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 6x^3 + 25x^2 + 21x - 10 \geq 0 \}$

On pose : $F(x) = 6x^3 + 25x^2 + 21x - 10$

On remarque que $F(-2) = 0$

Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $F(x) = (x-(-2))Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il

Existe trois réels a, b et c tels que $F(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

Or, $(x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a = 6 \\ b + 2a = 25 \\ c + 2b = 21 \\ 2c = -10 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a = 6 \\ b = 13 \\ c = -5 \end{cases}$

$F(x) = (x+2)(6x^2 + 13x - 5)$.

Le discriminant de : $6x^2 + 13x - 5$ est : $\Delta = 13^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 289 = 17^2$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{2 \times 6} = \frac{-13-17}{12} = -\frac{5}{2}$ et $x_2 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{2 \times 6} = \frac{-13+17}{12} = \frac{1}{3}$

$6x^2 + 13x - 5 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) = 2 \times 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (3x-1)(2x+5)$

Donc : $F(x) = (x+2)(3x-1)(2x+5)$

PROF: ATMANI NAJIB

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que :

$x=-\frac{5}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left[-\frac{5}{2},-2\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=2026x-5\tan x$

$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice2 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{2\sqrt{x-1}-1}{3x^2+6x+5}$ 2) $f(x)=\frac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$ 3) $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+5}+\frac{1}{x+1}$

4) $f(x)=\sqrt{\frac{2x+8}{x+1}}$ 5) $f(x)=\frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$ 6) $f(x)=\frac{2x-1}{|x|+x}$

7) $f(x)=2\sin x-3\cos x-1$ 8) $f(x)=\frac{2\sin x}{2\cos x-1}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{2\sqrt{x-1}-1}{3x^2+6x+5}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\neq 0\ \ et\ \ x-1\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\neq 0\ \ et\ \ x\geq 1\right\}$

$3x^2+6x+5=0$: $\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$ (Pas de solutions)

Donc : $3x^2+6x+5\neq 0$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\geq 1\right\}$

Donc : $D_f=[1;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^4-2x^2+1\neq 0\right\}$

$x^4-2x^2+1=0$ Equivalent à : $(x^2)^2-2x^2+1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons l'équation : $X^2-2X+1=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times1=4-4=0$

La solution double de : $X^2-2X+1=0$ est : $X=\frac{-(-2)}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

Donc on a : $x^2=1$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc : $x=1$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

3) $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+5}+\frac{1}{x+1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2+6x+5\geq 0 \text{ et } x+1\neq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2+6x+5\geq 0 \text{ et } x\neq -1\right\}$

Étudions le signe du trinôme $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2+6x+5$		$+$	

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq -1\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1;+\infty[$

4) $f(x)=\sqrt{\frac{2x+8}{x+1}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\neq 0 \text{ et } \frac{2x+8}{x+1}\geq 0\right\}$

$x+1=0$ Équivalent à : $x=-1$ et $2x+8=0$ Équivalent à : $x=-4$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$2x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+8}{x+1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

5) $f(x)=\frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|2x-4|-|x-1|\neq 0\right\}$

$|2x-4|-|x-1|=0 \Leftrightarrow |2x-4|=|x-1| \Leftrightarrow 2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1 \Leftrightarrow x=3$ ou $2x+x=4+1$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $3x=5$ $\Leftrightarrow x=3$ ou $x=\frac{5}{3}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{3};3\right\}$

6) $f(x)=\frac{2x-1}{|x|+x}$ $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|+x\neq 0\right\}$ donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|\neq -x\right\}$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$ alors $|x|=x\neq -x$ donc : $\mathbb{R}^{*+}\subset D_f$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$ alors $|x|=-x$ donc : $x\notin D_f$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}^{*+}$

PROF: ATMANI NAJIB

7) $f(x)=2\sin x-3\cos x-1$

$D_f=\mathbb{R}$ Car tous les réels ont des images par f

8) $f(x)=\frac{2\sin x}{2\cos x-1}$: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq 0\}$

$2\cos x-1=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice3: (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+3x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Montrer que f est strictement croissante sur $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) a) En déduire que : pour tout $x\in[-1;3]$ on a : $-1\leq f(x)\leq 19$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ on a : $-1\leq f(x)\leq 11$

Solution :1) f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$.

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1^2+3x_1+1)-(x_2^2+3x_2+1)}{x_1-x_2}\quad T(x_1;x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2+3(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2+3)}{x_1-x_2}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=x_1+x_2+3$ par suite :

Si : $x_1\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ et $x_2\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ Alors $x_1\geq\frac{-3}{2}$ et $x_2\geq\frac{-3}{2}$ et $x_1\neq x_2$ implique $x_1+x_2\succ -3$

Donc $x_1+x_2+3\succ 0$ par suite : $T(x_1;x_2)\succ 0$ D'où : f est strictement croissante sur $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

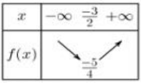
Si : $x_1\in\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ et $x_2\in\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

Alors : $x_1\leq\frac{-3}{2}$ et $x_2\leq\frac{-3}{2}$ et $x_1\neq x_2$ cela implique $x_1+x_2\prec -3$

Donc $x_1+x_2+3\prec 0$ par suite : $T(x_1;x_2)\prec 0$ D'où : f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

4) Résumé : tableau de variation :

On a : $f\left(\frac{-3}{2}\right)=\left(\frac{-3}{2}\right)^2+3\left(\frac{-3}{2}\right)+1=\frac{-5}{4}$ donc :


x
$-\infty$
$\frac{-3}{2}$
$+\infty$
$f(x)$
$\frac{-5}{4}$

PROF: ATMANI NAJIB

5) a) Puisque f est strictement croissante sur $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ alors f est strictement croissante sur $[-1;3]$ Car : $[-1;3]\subset\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

Si on a $x\in[-1;3]$ alors : $f(-1)\le f(x)\le f(3)$ (f est strictement croissante)

On a : $f(-1)=(-1)^2+3(-1)+1=1-3+1=-1$ et $f(3)=3^2+3\times3+1=9+9+1=19$

Par suite : $-1\le f(x)\le 19$ si $x\in[-1;3]$

b) Puisque f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ alors f est strictement croissante sur $x\in[-5;-2]$ car : $[-5;-2]\subset\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

Si on a $x\in[-5;-2]$ alors : $f(-2)\le f(x)\le f(-5)$ (f est strictement décroissante)

On a : $f(-2)=(-2)^2+3(-2)+1=4-6+1=-1$ et $f(-5)=(-5)^2+3(-5)+1=25-15+1=11$

Par suite : $-1\le f(x)\le 11$ si $x\in[-5;-2]$

Exercice4 : Etudier les variations de la fonction définie par : $g(x)=\frac{x}{x+1}$ et dresser son tableau de variations

Solution : $g(x)=\frac{x}{x+1}$: On a $x\in D_g \Leftrightarrow x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

Soient : $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tel que : $x_1\neq x_2$; on a : $T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a) Sur $I=]-\infty;-1[$: Soit $x_1\in]-\infty;-1[$ et $x_2\in]-\infty;-1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec-1$ et $x_2\prec-1$ Donc $x_1+1\prec0$ et $x_2+1\prec0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ0$

Donc $T(x_1;x_2)=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ0$ sur $I=]-\infty;-1[$

D'où g est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b) Sur $J=]-1;+\infty[$: Soit $x_1\in]-1;+\infty[$ et $x_2\in]-1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\succ-1$ et $x_2\succ-1$

Donc $x_1+1\succ0$ et $x_2+1\succ0$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $J =]-1;+\infty[$:

D'où : g est strictement croissante sur $J =]-1;+\infty[$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

Exercice5 : 1) Pour chaque question, répondre avec une phrase en précisant les intervalles.

a) Quel est le signe de la fonction f ? b) Quels sont les extremums de la fonction g ?

2) Tracer une représentation graphique de f et g sur leurs ensembles de définition.

x	-5		-4		-3		-1		0		1		2		3		5
$f(x)$	2	↘	0	↘	−4	↗	0	↗	3	↘	0	↗	4	↘	0	↘	−2

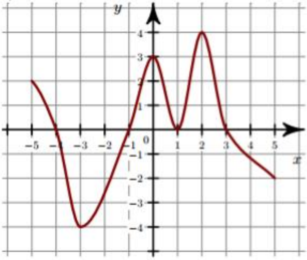
x	-5		-3		-1		0		1		2		3		4		5
$g(x)$	−2	↗	0	↘	−4	↗	0	↗	4	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1

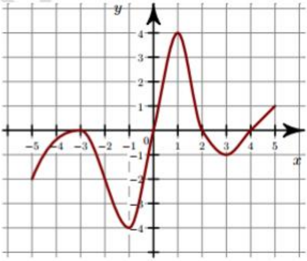
Solution : 1) a) La fonction f est négative sur [−4 ; −1] et positive sur [−5 ; −4], [−1 ; 3].

b) • Sur [−5 ; 5] , le maximum de g est y = 4. Il est atteint en x = 1.

• Sur [−5 ; 5] , le minimum de g est y = −4. Il est atteint en x = −1.

2)





Exercice6 : 1) À partir du tableau de variation de la fonction f, compléter les égalités ou inégalités suivantes

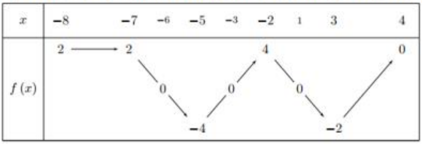
a) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x) \geq$ ......

b) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x) \leq$ ......

c) Pour x ∈ [2,8 ; 3,3], $f(x) \leq$ ......

2) a) Donner un encadrement de la fonction f sur l'intervalle [−8 ; 4].

b) Donner un encadrement de la fonction f sur l'intervalle [−7,4 ; −6,3].



Solution :1) a) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x) \geq -4$

b) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x) \leq 4$

c) Pour x ∈ [2,8 ; 3,3], $f(x) \leq 0$

2) a) Sur [−8 ; 4], $-4 \leq f(x) \leq 4$.

b) Sur [−7,4 ; −6,3], $0 \leq f(x) \leq 2$.

Exercice7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

1) Déterminer D_f 2) Démontrer que f est minorée par $-\frac{1}{2}$ et majorée par $\frac{1}{2}$

Solution :1) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 1+\sqrt{x^2+1} \neq 0 \ et \ x^2+1 \geq 0 \right\}$

$1+\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = -1$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ et comme : $x^2+1 \geq 0$ est vrais

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) Montrons que : $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Il suffit de montrer que : $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$?

Soit $x \in \mathbb{R}$: $|f(x)| = \left|\dfrac{\cos x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| = \dfrac{|\cos x|}{\left|1+\sqrt{x^2+1}\right|} = \dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}|\cos x|$ car $1+\sqrt{x^2+1} \succ 0$

Or on sait que : $|\cos x| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq \dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}$

Montrons que : $\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} \leq \dfrac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a : $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+1 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} \leq \dfrac{1}{2}$

Donc : $\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} \leq \dfrac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ par suite : $|f(x)| \leq \dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} \leq \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire : $|f(x)| \leq \dfrac{1}{2}$: $\forall x \in \mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : $-\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice8 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2+3} - 2\sin x + 3\cos x$ est Bornée.

Solution : On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + 2 \ge 2 \Rightarrow 0 \prec \frac{1}{x^2+2} \le \frac{1}{2}$ (1)

$\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \le \sin x \le 1$ donc $-2 \le -2\sin x \le 2$: (2)

$\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \le \cos x \le 1$ donc $-3 \le 3\cos x \le 3$: (3)

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow 0-2-3 \le f(x) \le \frac{1}{2}+2+3 \Rightarrow -5 \prec f(x) \le \frac{11}{2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc : La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice9: Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimale de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution :1) $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{x}+5 \ne 0 \ et \ \ x \ge 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \ne -5 \ \ et \ \ x \ge 0 \right\}$

$D_f = [0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x) \ge -1$ et que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$f(x)-(-1) = f(x)+1 = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}+1 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} \ge 0$

Donc $f(x) \ge -1 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ et on a :

$f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x)+1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc l'équation $f(x) = -1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0) = -1$ donc : $f(x) \ge f(0) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Ont dit que $f(0) = -1$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^+$; $f(x)-1 = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}-1 = \frac{-10}{\sqrt{x}+5} \prec 0$

Donc : $f(x) \prec 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc : f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M = 1$

Et puisque $f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

Exercice10 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Déterminer D_f

2) Montrer que -1 est le minimum absolu de f sur D_f.

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0$: $\Delta<0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) il s'agit de montrer que :$-1\leq f(x)$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-(-1)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}+1=\dfrac{x^2+4x+1+x^2+1}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+1}=\dfrac{2(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$

car $x^2+1>0$ et on a aussi : $(x+1)^2\geq 0$

Donc ; $f(x)+1\geq 0$ par suite : $-1\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=-1\Leftrightarrow\frac{2(x+1)^2}{x^2+1}=0\Leftrightarrow 2(x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$$

Donc : $f(-1)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Conclusion :-1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice11 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}$:

1) Montrer que : f est minorée par -1

2) Soient : $x_1\in\mathbb{R}^*$ et $x_2\in\mathbb{R}^*$ tel que : $x_1\neq x_2$

Monter que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2\times x_2^2}$

3) En déduire les variations de f sur les intervalles : $I=]0,1]$ et $J=[1;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+^*$

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$ on a : $-1\leq f(x)$

Soit : $x\in\mathbb{R}^*$: On a : $f(x)-(-1)=\dfrac{1-2x}{x^2}+1=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geq 0$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*$ on a : $-1\leq f(x)$

Donc : f est minorée par -1

2) Soient : $x_1\in\mathbb{R}^*$ et $x_2\in\mathbb{R}^*$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2\times x_2^2}$

Soient : $x_1\in\mathbb{R}^*$ et $x_2\in\mathbb{R}^*$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1-2x_1}{x_1^2}-\frac{1-2x_2}{x_2^2}=\frac{x_2^2(1-2x_1)-x_1^2(1-2x_2)}{x_1^2x_2^2}=\frac{x_2^2-2x_1x_2^2-x_1^2+2x_1^2x_2}{x_1^2x_2^2}$$

PROF: ATMANI NAJIB

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{-(x_1-x_2)(x_1+x_2)+2x_1x_2(x_1-x_2)}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1-x_2)\left[-x_1+x_1x_2+x_1x_2-x_2\right]}{x_1^2x_2^2}$$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{(x_1-x_2)\left[x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)\right]}{x_1^2\times x_2^2}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2\times x_2^2}$

3) →) Déduisons les variations de f sur l'intervalle : $I=]0,1]$

Soient : $x_1\in]0,1]$ et $x_2\in]0,1]$ deux réels tel que : $x_1\neq x_2$

Alors : $0<x_1\leq 1$ et $0<x_2<1$ donc : $-1<x_1-1\leq 0$ et $-1<x_2-1<0$

Alors : $x_1(x_2-1)<0$ et $x_2(x_1-1)\leq 0$ et $x_1^2\times x_2^2>0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2\times x_2^2}<0$

D'où : f est décroissante sur $I=]0,1]$

→) Déduisons les variations de f sur l'intervalle : $J=[1;+\infty[$

Soient : $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$ deux réels tel que : $x_1\neq x_2$

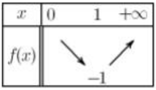
Alors : $x_1\geq 1$ et $x_2>1$ donc : $x_1-1\geq 0$ et $x_2-1>0$

Alors : $x_1(x_2-1)\geq 0$ et $x_2(x_1-1)\geq 0$ et $x_1^2\times x_2^2>0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2\times x_2^2}\geq 0$

D'où : f est croissante sur : $J=[1;+\infty[$

D'où : son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+^*$ est :


x
0
1
$+\infty$
$f(x)$
-1

Exercice12 : Soit f une fonction numérique définie sur : $]-\infty;-\sqrt{2}]\cup]-1;1[\cup[\sqrt{2};+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+1 & si \quad |x|\prec 1 \\ f(x)=x^2-1 & si \quad |x|\geq\sqrt{2} \end{cases}$$

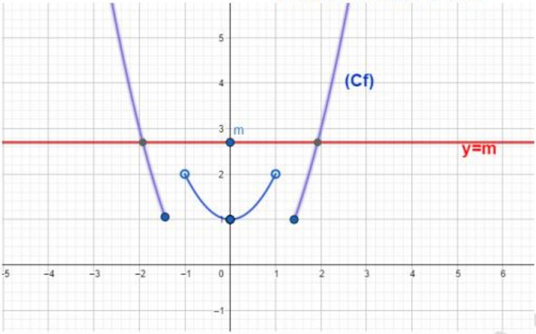
1) Tracer la représentation graphique de la fonction dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Discuter graphiquement selon les valeurs de m le nombre de racines de l'équation : $f(x)=m$

Solution :

PROF: ATMANI NAJIB

3) $\begin{cases} f(x)=x^2+1 & si \quad |x|\prec 1 \\ f(x)=x^2-1 & si \quad |x|\geq\sqrt{2} \end{cases}$



4) Le nombre de racines de l'équation : $f(x)=m$ c'est le nombre de points d'intersections de la courbe avec la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m\geq 2$: 2 racines pour l'équation : $f(x)=m$

Si $m=1$: 3 racines pour l'équation : $f(x)=m$

Si: $1\prec m\prec 2$: 4 racines pour l'équation : $f(x)=m$

Si $m\prec 1$: pas de racines pour l'équation : $f(x)=m$

Exercice13 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x|x|-4x+3$

1) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$-x|x|+4x-3+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : 1) a) ☞ sur $\mathbb{R}^+$:

Soit : $x\in\mathbb{R}^+$ alors : $|x|=x$

Donc : $f(x)=x^2-4x+3$:f est une fonction polynôme : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

On a : $a=1$; $b=-4$ et $c=3$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times 1}=2$ et $f(2)=2^2-4\times 2+3=-1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une partie de la parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire :

$W(2;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=2$

b) ☞ sur $\mathbb{R}^-$:

Soit : $x\in\mathbb{R}^-$ alors : $|x|=-x$

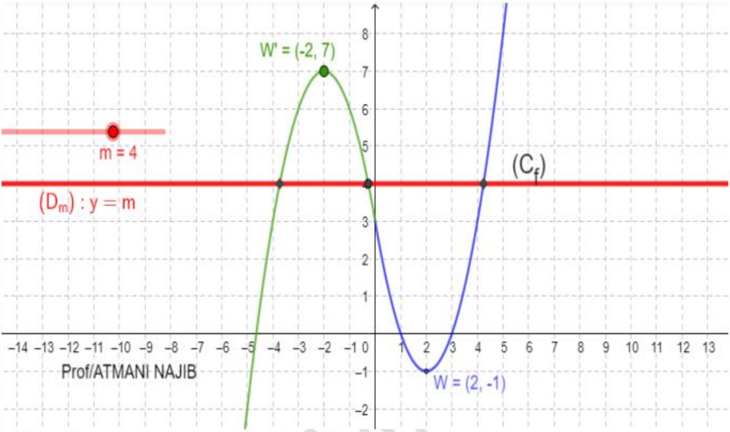
Donc : $f(x)=-x^2-4x+3$:f est une fonction polynôme : $(f(x)=ax^2+bx+c)$

On a : $a=-1$; $b=-4$ et $c=3$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times(-1)}=-2$ et $f(-2)=-(-2)^2-4\times(-2)+3=7$

Alors : la courbe (C_f) c'est une partie de la parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire :

$W(-2;7)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=-2$



2) Résolution graphique de l'équation $-x|x|+4x-3+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$:

$-x|x|+4x-3+m=0$ Signifie $m=x|x|-4x+3$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si: $m>7$ ou $m<-1$ il y'a une solution

Si: $m=7$ ou $m=-1$ il y'a deux solutions

Si: $-1<m<7$ il y'a une trois solutions

Exercice14 : On considère l'application g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)>1$; g est-elle surjective ?

2) a) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

b) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ g(x)=g(y)\Rightarrow x=y$

Solution :1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)>1$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $g(x)-1=\sqrt{x^2+2x+2}-x-1=\sqrt{x^2+2x+1+1}-(x+1)=\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)$

Or : $\sqrt{(x+1)^2+1}>\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

Donc : $g(x)-1>|x+1|-(x+1)$

Donc : $g(x)-1>|x+1|-(x+1)\geq 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)>1$

Donc : si $x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)>1$

Donc : $g(\mathbb{R})\subset]1;+\infty[$

Par exemple : $0\notin]1;+\infty[$ et n'a pas d'antécédents par f

Donc : g est non surjective

2) a) Montrons que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$:

$$g(x)-g(y)=\sqrt{x^2+2x+2}-x-\sqrt{y^2+2y+2}+y=\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{y^2+2y+2}-(x-y)$$

$$g(x)-g(y)=\frac{x^2+2x+2-y^2-2y-2}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}(x-y)$$

$$g(x)-g(y)=\frac{(x-y)(x+y)+2(x-y)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}-(x-y)$$

$$g(x)-g(y)=(x-y)\left[\frac{x+y+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}-1\right]$$

$$g(x)-g(y)=(x-y)\left[\frac{x+y+2-\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{y^2+2y+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}\right]$$

$$g(x)-g(y)=(x-y)\left[\frac{2-\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)-\left(\sqrt{y^2+2y+2}-y\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}\right]$$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 \quad g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

b) Montrons que : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 \; g(x)=g(y)\Rightarrow x=y$

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$:tel que : $g(x)=g(y)$

$\Rightarrow g(x)-g(y)=0\Rightarrow \dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}=0\Rightarrow x-y=0 \;\; ou \;\; 2-g(x)-g(y)=0$

Or : $\forall x\in\mathbb{R} \quad g(x)>1$ donc : $g(x)>1$ et $g(y)>1$

Donc : $g(x)+g(y)>2\Rightarrow 2-g(x)-g(y)\neq 0$

$\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y$

Exercice 15 : Soit f_m la fonction tel que : $f_m(x)=\dfrac{(m-1)x+1}{mx-1}$ avec : $m\in\mathbb{R}^*$(paramètre)

Et (C_{f_m}) sa courbe représentative.

1) Déterminer D_{f_m}

2) Montrer que : tous les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$

3) Donner le tableau de variation de f_m en discutant les cas suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}^*$

4) Tracer les courbes (C_{f_1}) et $(C_{f_{-1}})$ dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{|x|+1}{2|x|-1}$

a) Déterminer D_g b) Montrer que : g est paire

b) Vérifier que : $g(x)=f_2(x)$ Pour tout $x\in[0;+\infty[-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solutions : $f_m(x)=\dfrac{(m-1)x+1}{mx-1}$

1) Détermination de : $D_{f_m}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,mx-1\neq 0\}$

On a : $mx-1=0$ signifie que : $x=\dfrac{1}{m}$ car $m\in\mathbb{R}^*$

Donc $D_{f_m}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{m}\right\}$

2) Montrons que : tous les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$

On a : $f_m(0)=\dfrac{(m-1)\times 0+1}{m\times 0-1}=-1$ par suite : les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point :

PROF ATMANI NAJIB

$A(0;-1)$; $\forall m \in \mathbb{R}^*$

3) Le tableau de variation de f_m suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}^*$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ m & -1 \end{vmatrix} = -m+1-m = -2m+1$$

Si : $\Delta_m = -2m+1 \succ 0$ c'est à dire : $m\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$ alors : f_m est strictement croissante

x	$-\infty$	$1/m$	$+\infty$
$fm(x)$	↗	‖	↗

Si : $\Delta_m = -2m+1 \prec 0$ c'est à dire : $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors : f_m est strictement décroissante

x	$-\infty$	$1/m$	$+\infty$
$fm(x)$	↘	‖	↘

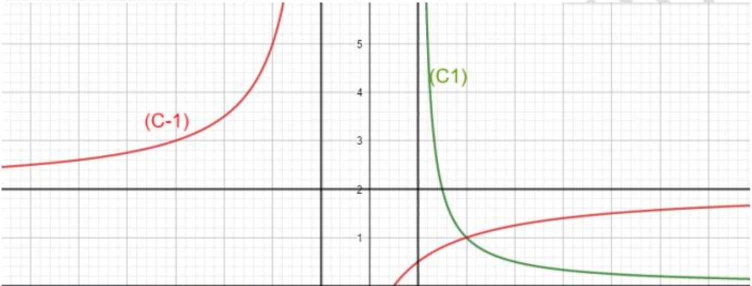
Si : $\Delta_m = -2m+1 = 0$ c'est à dire : $m=\frac{1}{2}$ alors $f_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\times 0+1}{\frac{1}{2}\times 0-1} = -1$

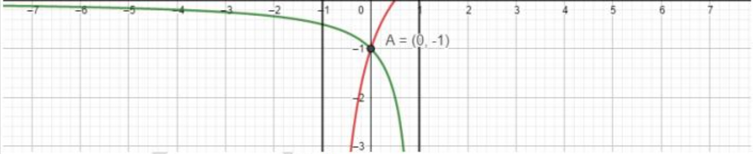
Alors : f_m est constante

3)Les courbes $\left(C_{f_1}\right)$ et $\left(C_{f_{-1}}\right)$ dans un même repère : $f_1(x)=\frac{1}{x-1}$ et $f_{-1}(x)=\frac{-2x+1}{-x-1}=\frac{2x-1}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f{-}1(x)$	↗	‖	↗

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f1(x)$	↘	‖	↘





5) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{|x|+1}{2|x|-1}$

a) Détermination de : D_g

$D_g=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2|x|-1\neq 0\}$

$2|x|-1=0\Leftrightarrow |x|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ *ou* $x=\dfrac{1}{2}$

Donc : $D_g=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

b) Montrons que : g est paire

- $\forall x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\Rightarrow -x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$
- $g(-x)=\dfrac{|-x|+1}{2|-x|-1}=\dfrac{|x|+1}{2|x|-1}=g(x)$

---

b) Vérifions que : $g(x)=f_2(x)$ Pour tout $x\in\left[0;+\infty\right[-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

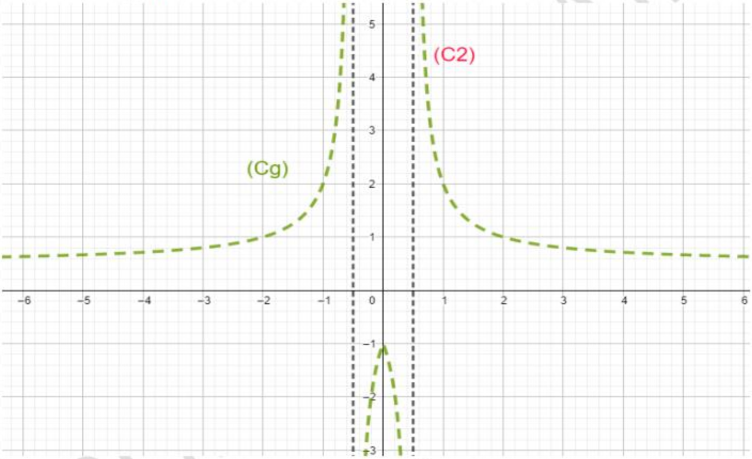
Si : $x\in\left[0;+\infty\right[-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ alors : $|x|=x$

$g(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$ et $f_2(x)=\dfrac{(2-1)x+1}{2x-1}=\dfrac{x+1}{2x-1}$

Donc : $g(x)=f_2(x)$ sur $\left[0;+\infty\right[-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

c) Traçage de la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On a : $f_2(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$



Exercice16 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)a) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de f

b) Tracer la courbe (C_f)

2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)>0$

3) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

a) Montrer que la courbe (C_g) c'est une parabole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de g

b) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{g(x)}{f(x)}>0$

(μ La solution de l'équation : $g(x)=f(x)$ n'est pas demandé de la déterminer)

Solution : 1) a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

En générale si : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre

$W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre :

$W(1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=1$ et $y=1$

Tableau de variations de f : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1\succ 0$

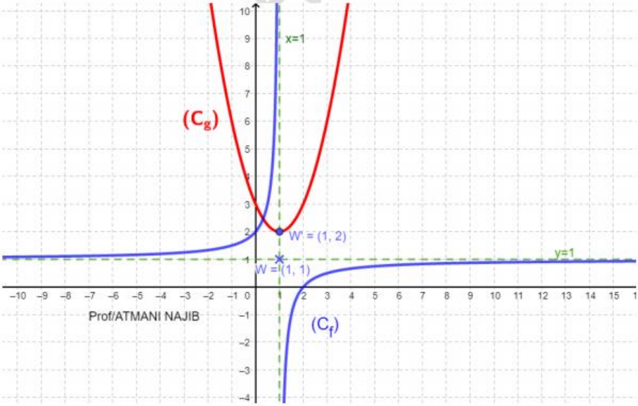
Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]1\ ;\ +\infty[$ et $]-\infty\ ;\ 1[$

Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f(x)$	↗ ‖	↗

-2	-1	0	1	2	3	4
4/3	3/2	2	▨	0	1/2	2/3

b) La courbe (C_f) : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$



---

2) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)>0$

$f(x)>0$ Equivaut à : x appartient à l'intervalle ou (C_f)est au-dessus de l'axe des abscisses

Donc : $S=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

3) a) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

On a g est une fonction polynôme donc : $D_g=\mathbb{R}$

$(g(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=3$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times 1}=1$ et $g(\alpha)=g(1)=(1)^2-2\times(1)+3=2$

Ainsi : dans le repère $(o;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W'(-\alpha;\beta)$: $W'(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=1$

Tableau de variations de g : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	2	↗

c) Résolution graphique de l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)}>1$

$\frac{g(x)}{f(x)}>1$ Equivaut à : Equivaut à : $\frac{g(x)-f(x)}{f(x)}>0$

Donc : on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		μ		1		2		$+\infty$
$g(x)-f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	‖	$-$		$+$	
quotient		$+$	0	$-$	‖	$-$		$+$	

Donc : $S=]-\infty;\mu[\cup]2;+\infty[$

Exercice17 : Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Dresser le Tableau de variations de f et de g

2) a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

4) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Solution : 1) a) $f(x)=-x^2-2x+3$: On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=3$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$ Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $(f(-1)=4)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-1;4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	↗	4	↘

1)b) $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$; on a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=-2$ et $y=1$ et on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3\succ 0$

Donc le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

2)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3=0$ $\quad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{2+4}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$ et $x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3;0)$ et $B(1;0)$

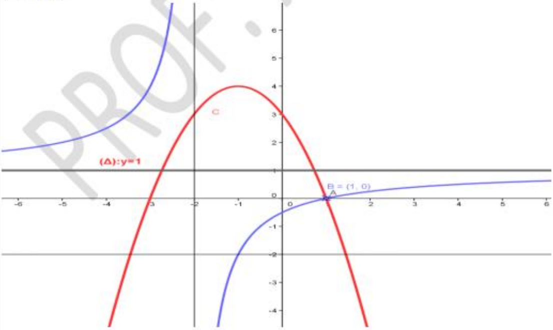
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

3)Représentation graphique :

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



4) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$:

PROF: ATMANI NAJIB

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

4)b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-2;1]$ Donc $S=]-2;1]$

Exercice18 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=x\sqrt{x}$ et $f(x)=x^2-2x+2$

1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : g est croissante sur D_g

3) En déduire que : $g(x)\in[0;1]$ $\forall x\in[0;1]$

4) Donner le tableau de variation de f

5) On considère la fonction h tel que : $h(x)=x^3-2x\sqrt{x}+2$

a) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)$ $\forall x\succ 0$ b) Étudier la monotonie de h dans: $[0;1]$ et $[1;+\infty[$

Solution : 1) a) $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=[0,+\infty[$ et $D_f=\mathbb{R}$

2) Montrons que : g est croissante sur $[0,+\infty[$

g Est le produit de deux fonctions croissantes sur $[0,+\infty[$ donc : g est croissante sur $[0,+\infty[$

3) Déduction que : $g(x)\in[0;1]$ $\forall x\in[0;1]$

$x\in[0;1]\Rightarrow 0\leq x\leq 1\Rightarrow g(0)\leq g(x)\leq g(1)$ car : : g est croissante sur $[0,+\infty[$

$$\Rightarrow 0\leq g(x)\leq 1\Rightarrow g(x)\in[0;1]$$

4) Le tableau de variation de f : $f(x)=x^2-2x+2$ On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=2$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2\times 1}=1$ Et $\beta=f(\alpha)=f(1)=(1)^2-2\times 1+2=1$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

5) $h(x)=x^3-2x\sqrt{x}+2$

a) Vérifions que : $h(x)=(f\circ g)(x)$ $\forall x\succ 0$ on a : $g(x)=x\sqrt{x}$ et $f(x)=x^2-2x+2$

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=(x\sqrt{x})^2-2x\sqrt{x}+2=x^3-2x\sqrt{x}+2;\ \forall x\succ 0$$

b) Étude de la monotonie de h dans: $[0;1]$ et $[1;+\infty[$

a) Sur $[0;1]$: On a $h(x)=(f\circ g)(x)$

Puisque g est croissante sur $[0;1]$ et $g([0;1])\subset[0;1]$ et f est décroissante sur $[0;1]$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $[0;1]$

b) Sur $[1;+\infty[$: Puisque g est décroissante sur $[1;+\infty[$ et $g([1;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ et f est croissante sur $[1;+\infty[$ alors $h=f\circ g$ est croissante sur $[1;+\infty[$

PROF. ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB