1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Série N°13 : Généralités sur les fonctions

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{-2\sqrt{3-4x}+6}{2x^2-3x+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+3}}{x-3}$ 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-8}{x^6-7x^3-8}$

4) $f(x)=\sqrt{6x^3+25x^2+21x-10}$ 5) $f(x)=2026x-5\tan x$

Exercice2 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{3x^2+6x+5}$ 2) $f(x)=\dfrac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$ 3) $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+5}+\dfrac{1}{x+1}$

4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+8}{x+1}}$ 5) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$ 6) $f(x)=\dfrac{2x-1}{|x|+x}$

7) $f(x)=2\sin x-3\cos x-1$ 8) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$

Exercice3: Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+3x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Montrer que f est strictement croissante sur $\left[\dfrac{-3}{2};+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty;\dfrac{-3}{2}\right]$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) a) En déduire que : pour tout $x\in[-1;3]$ on a : $-1\le f(x)\le 19$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ on a : $-1\le f(x)\le 11$

Exercice4 : Etudier les variations de la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et dresser son tableau de variations

Exercice5 : 1) Pour chaque question, répondre avec une phrase en précisant les intervalles.
a) Quel est le signe de la fonction f ? b) Quels sont les extremums de la fonction g ?
2) Tracer une représentation graphique de f et g sur leurs ensembles de définition.

x	-5	-4	-3	-1	0	1	2	3	5
$f(x)$	2	0	-4	0	3	0	4	0	-2

x	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	-2	0	-4	0	4	0	-1	0	1

Exercice6 : 1) À partir du tableau de variation de la fonction f, compléter les égalités ou inégalités suivantes

a) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x)\ge$......

b) Pour x ∈ [−8 ; 4], $f(x)\le$......

c) Pour x ∈ [2,8 ; 3,3], $f(x)\le$......

2) a) Donner un encadrement de la fonction f sur l'intervalle [−8 ; 4].
b) Donner un encadrement de la fonction f sur l'intervalle [−7,4 ; −6,3].

x	-8	-7	-6	-5	-3	-2	1	3	4
$f(x)$	2	2	0	-4	0	4	0	-2	0

Exercice7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

1) Déterminer D_f 2) Démontrer que f est minorée par $-\dfrac{1}{2}$ et majorée par $\dfrac{1}{2}$

Exercice8 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}-2\sin x+3\cos x$ est Bornée.

Exercice9 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimale de f
3) Démontrer que f est majorée par 1 et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Exercice10 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que -1 est le minimum absolu de f sur D_f.

Exercice11 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}$:

1) Montrer que : f est minorée par -1
2) Soient : $x_1\in\mathbb{R}^*$ et $x_2\in\mathbb{R}^*$ tel que : $x_1\ne x_2$

Monter que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)}{x_1^2\times x_2^2}$

3) En déduire les variations de f sur les intervalles : $I=]0,1]$ et $J=[1;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice12 : Soit f une fonction numérique définie sur : $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left]-1;1\right[\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+1 & si\quad |x|\prec 1 \\ f(x)=x^2-1 & si\quad |x|\ge\sqrt{2} \end{cases}$$

1) Tracer la représentation graphique de la fonction dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

2) Discuter graphiquement selon les valeurs de m le nombre de racines de l'équation : $f(x)=m$

Exercice13 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x|x|-4x+3$

1) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
$-x|x|+4x-3+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Exercice14 : On considère l'application g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)>1$; g est-elle surjective ?

2) a) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

b) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ g(x)=g(y)\Rightarrow x=y$

Exercice 15 : Soit f_m la fonction tel que : $f_m(x)=\dfrac{(m-1)x+1}{mx-1}$ avec : $m\in\mathbb{R}^*$ (paramètre)

Et (C_{f_m}) sa courbe représentative.

1) Déterminer D_{f_m}

2) Montrer que : tous les courbes représentatives (C_{f_m}) passent par le point : $A(0;-1)$

3) Donner le tableau de variation de f_m en discutant les cas suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}^*$

4) Tracer les courbes (C_{f_1}) et $(C_{f_{-1}})$ dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{|x|+1}{2|x|-1}$

a) Déterminer D_g b) Montrer que : g est paire

b) Vérifier que : $g(x)=f_2(x)$ Pour tout $x\in[0;+\infty[-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice16 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)a) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de f
b) Tracer la courbe (C_f)

2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)>0$

3) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

a) Montrer que la courbe (C_g) c'est une parabole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de g
b) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{g(x)}{f(x)}>0$

(μ La solution de l'équation : $g(x)=f(x)$ n'est pas demandé de la déterminer)

Exercice17 : Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Dresser le Tableau de variations de f et de g
2) a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses
b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère
4) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\ge g(x)$

Exercice18 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=x\sqrt{x}$ et $f(x)=x^2-2x+2$

1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : g est croissante sur D_g

3) En déduire que : $g(x)\in[0;1]\ \forall x\in[0;1]$
4) Donner le tableau de variation de f

5) On considère la fonction h tel que : $h(x)=x^3-2x\sqrt{x}+2$

a) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad\forall x\succ 0$ b) Étudier la monotonie de h dans: $[0;1]$ et $[1;+\infty[$

Exercice19 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

1) Calculer : $f(1)$; $f(4)$: $f(-5)$

2) Déterminer D_f

3) Montrer que : 4 est une période pour la fonction f
4) Montrer que f est bornée
5) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I=[0;4[$

6) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-4;8]\cap D_f=[-4;8]$ dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

Exercice20 : Soit la fonction F définie par :
$\forall x\in\mathbb{R}:F(x)=x-E(x)$ (partie fractionnaire d'un nombre)

1)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $0\le F(x)\prec 1$ c'est-à-dire montrer que F est bornée

2) Montrer que la fonction F est périodique de période 1.
3) Montrer que : $\forall x\in[0;1[$; $F(x)=x$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $F(x)=0$

5)Tracer (C_f) la représentation graphique de la fonction F sur : $I=[-5;5[$

6)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)+E(y)\le E(x+y)$

7)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(2x)+E(2y)$

Exercice21 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=(x-E(x))^2$

1) Montrer que f est bornée
2) a) Vérifier que 1 est une période pour la fonction f
b) En déduire le domaine d'étude de f
3) a) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;1[$

b) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

4)Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=\dfrac{1}{(x-E(x))^2}$

a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}:\ E(x)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

b) En déduire le domaine d'étude de g
c) Donner le Tableau de variation de g sur : $]-1;1[$

d)Tracer la représentation graphique de la fonction g sur : $[-3;3[$

Exercice22 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{1}{1-E(x)}$ 2) $f(x)=\dfrac{x+4}{2E(x)-3}$ 3) $f(x)=\sqrt{x-E(x)}$ 4) $f(x)=\dfrac{2x-9}{\sqrt{x-E(x)}}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien