1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°8 : Généralités sur les fonctions

PROF. ATMANI NAJIB

Exercice1 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$

Si on sait que : $f(-7)=7$ calculer : $f(7)$

Solution : On a : $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$

Donc : $f(-x)=a(-x)^7+b(-x)^3+c(-x)-5$

Donc : $f(-x)=-ax^7-bx^3-cx-5$

Donc : $f(x)+f(-x)=-10$

Donc : $f(-7)+f(7)=-10$ et comme : $f(-7)=7$

Donc : $f(7)=-10-f(-7)=-10-7=\boxed{-17}$

Exercice2 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3-5x}$ 2) $f(x)=\dfrac{-x^2+2006}{|x+2|+1}$ 3) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}-\dfrac{x^2}{2x^2+13x+6}$

4) $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{(3|x-5|-2|4-3x|)\sqrt{x+1}}$ 5) $f(x)=\sqrt{3-|-x+1|}$ 6)

$f(x)=\sqrt{\dfrac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}}$ 7) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{2\sin x+1}$. 8) $f(x)=\dfrac{1}{2025\cos x-2026}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3-5x}$

$x^3-5x=0$ Équivalent à : $x(x^2-5)=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2-5=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2=5$ Équivalent à : $x=0$ ou $x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{5};0;\sqrt{5}\}$

2) $f(x)=\dfrac{-x^2+2006}{|x+2|+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x+2|+1\neq 0\}$

$|x+2|+1=0$ Signifie que : $|x+2|=-1$ pas de solutions Car $|x+2|\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}-\dfrac{x^2}{2x^2+13x+6}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3x - 2 \neq 0 \ \ et \ \ 2x^2 + 13x + 6 \neq 0 \ \}$

Le discriminant de $2x^2 - 3x - 2$ est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 2$

Le discriminant de $2x^2 + 13x + 6$ est :$\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

$x_1' = \frac{-13 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -6$ et $x_2' = \frac{-13 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-6 ; -\frac{1}{2} ; 2\right\}$

4) $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{(3|x-5| - 2|4-3x|)\sqrt{x+1}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3|x-5| - 2|4-3x| \neq 0 \ \ et \ \ x+1 > 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3|x-5| - 2|4-3x| \neq 0 \ \ et \ \ x > -1\}$

$3|x-5| - 2|4-3x| = 0$ Signifie que : $3|x-5| = 2|4-3x|$

Signifie que : $|3x - 15| = |8 - 6x|$

Signifie que : $3x - 15 = 8 - 6x$ ou $3x - 15 = -(8 - 6x)$

Signifie que : $9x = 23$ ou $-3x = 7$

Signifie que : $x = \frac{23}{9}$ ou $x = -\frac{7}{3}$

Donc : $D_f =]-1; +\infty[- \left\{-\frac{7}{3}; \frac{23}{9}\right\} = \left]-1; \frac{23}{9}\right[\cup \left]\frac{23}{9}; +\infty\right[$

5) $f(x) = \sqrt{3 - |-x+1|}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3 - |-x+1| \geq 0 \ \}$

$3 - |-x+1| \geq 0$ Signifie que : $|-x+1| \leq 3$ Signifie que : $-3 \leq -x + 1 \leq 3$

Signifie que : $-3 - 1 \leq -x + 1 - 1 \leq 3 - 1$

Signifie que : $-4 \leq -x \leq 2$

Signifie que : $-2 \leq x \leq 4$

Donc : $D_f = [-2; 4]$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{5(7x + 5 - 6x^2)}{-3(1-x)^2}}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{5(7x + 5 - 6x^2)}{-3(1-x)^2} \geq 0 \ \ \right\}$..

Pour déterminer le signe du trinôme : $7x + 5 - 6x^2$

Calculons son discriminant : $a = -6 \ ; b = 7 ; c = 5$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 7^2 - 4 \times (-6) \times 5 = 49 + 120 = 169 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

PROF: ATMANI NAJIB

$x_1=\frac{-7-\sqrt{169}}{2a}=\frac{-7-13}{2\times(-6)}=\frac{5}{3}$ et $x_2=\frac{-7+\sqrt{169}}{2a}=\frac{-7+13}{2\times(-6)}=-\frac{1}{2}$

$-3(1-x)^2\le 0$ Car un carré est toujours positif ou nul.

$-3(1-x)^2=0$ Signifie que : $1-x=0$ Signifie que : $x=1$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$7x+5-6x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-3(1-x)^2$		$-$		$-$	0	$-$		$-$	
$\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Par suite : $D_f=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$

7) $f(x)=\frac{2\cos x}{2\sin x+1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\sin x+1\neq 0\}$

$2\sin x+1=0$ Signifie $\sin x=-\frac{1}{2}$

Signifie que : $\sin x=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ donc: $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Signifie $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

Signifie $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

8) $f(x)=\frac{1}{2025\cos x-2026}$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\quad et\quad 2025\cos x-2026\neq 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\quad et\quad \cos x\neq\frac{2026}{2025}>1$ Toujours vraie

Car : $-1\le\cos x\le 1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

Exercice 3 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases}f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x+2}} & si\quad x\le 1\\ f(x)=\frac{x^2}{2x-1} & si\quad x>1\end{cases}$

Déterminer D_f

Solution : *Remarque :* $\begin{cases}f(x)=f_1(x) & si\quad x\in I_1\\ f(x)=f_2(x) & si\quad x\in I_2\end{cases}$

PROF. ATMANI NA

$D_f=\left(D_{f_1}\cap I_1\right)\cup\left(D_{f_2}\cap I_2\right)$

On pose : $f_1(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x+2}}$ et $I_1=\left]-\infty;1\right]$ et $f_2(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$ et $I_2=\left]1;+\infty\right[$

$D_{f_1}=\left]-2;+\infty\right[$ et $D_{f_2}=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$D_{f_1}\cap I_1=\left]-2;1\right]$ et $D_{f_2}\cap I_2=\left]1;+\infty\right]$

Donc : $D_f=\left]-2;1\right]\cup\left]1;+\infty\right]$

Donc : $D_f=\left]-2;+\infty\right[$

Exercice4 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m\in\mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs de m pour que : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$; déterminer les valeurs de m pour que $\forall x\in\{-2;1\}$ on a : $f(x)=g(x)$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:x^2+x+m\neq 0$

$x^2+x+m\neq 0\Leftrightarrow\ m\succ\frac{1}{4}\Leftrightarrow\Delta=b^2-4ac=1-4m\prec 0$

2) $f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{x-1}{x^2+x+m}=\dfrac{1}{x+2}$

$\Leftrightarrow(x-1)(x+2)=x^2+x+m\ \Leftrightarrow x^2+x-2=x^2+x+m$

$f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\}\Leftrightarrow -2=m$

Exercice5 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases}f(x)=x-1 & si\ x\in\left]-\infty;-1\right[\\ f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4} & si\,x\in[-1,1]\\ f(x)=x+1 & si\,x\in\left]1;+\infty\right[\end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

Solution : 1) *Remarque :* $\begin{cases}f(x)=f_1(x) & si\quad x\in I_1\\ f(x)=f_2(x) & si\quad x\in I_2\\ f(x)=f_3(x) & si\quad x\in I_3\end{cases}$ Alors : $D_f=\left(D_{f_1}\cap I_1\right)\cup\left(D_{f_2}\cap I_2\right)\cup\left(D_{f_3}\cap I_3\right)$

On pose : $f_1(x)=x-1$ et $I_1=\left]-\infty;-1\right[$; $f_2(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ et $I_2=[-1,1]$; $f_3(x)=x+1$ et $I_3=\left]1;+\infty\right[$

$D_{f_1}=\mathbb{R}$; $D_{f_2}=\left]-\infty;-2\right]\cup\left]-2;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$ et $D_{f_3}=\mathbb{R}$

$D_{f_1}\cap I_1=\mathbb{R}\cap\left]-\infty;-1\right[=\left]-\infty;-1\right[$; $D_{f_2}\cap I_2=\left(\left]-\infty;-2\right]\cup\left]-2;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[\right)\cap[-1,1]=[-1,1]$

$D_{f_3}\cap I_3=\mathbb{R}\cap\left]1;+\infty\right[=\left]1;+\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $D_f =]-\infty;-1[\cup [-1,1] \cup]1;+\infty] = \mathbb{R}$

2) ☞Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

☞→Si : $x \in]-\infty;-1[$ alors : $-x \in]1;+\infty[$

On a : $f(x) = x-1$ et $f(-x) = -x+1$ donc : $-f(x) = -x+1$

Donc : $f(-x) = -f(x)$

☞→Si : $x \in [-1,1]$ alors : $-x \in [-1,1]$

On a : $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ et $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\frac{x^3}{x^2-4}$ donc : $-f(x) = -\frac{x^3}{x^2-4}$

Donc : $f(-x) = -f(x)$

☞→Si : $x \in]1;+\infty[$ alors : $-x \in]-\infty;-1[$

On a : $f(x) = x+1$ et $f(-x) = -x-1$ donc : $-f(x) = -x-1$

Donc : $f(-x) = -f(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$ par suite : f est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de (C_f) il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E = \mathbb{R}^+$

Exercice6 : Soit la fonction numérique : $f(x) = -4x^3 + \frac{1}{2x}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de f

3) Montrer que : $f(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$: Pour tout $x \in D_f$

4) Montrer que la fonction : $g(x) = f(x)+1$ est une fonction ni paire ni impaire,

Solution : 1) On a $f(x) \in \mathbb{R}$ signifie $x \neq 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[= \mathbb{R} - \{0\}$

2) Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$f(-x) = -4(-x)^3 + \frac{1}{2(-x)} = -\left(-4x^3 + \frac{1}{2x}\right)$

Donc : $f(-x) = -f(x)$ si $x \in \mathbb{R}^*$

Cela signifie que : f est une fonction impaire

3) Pour tout $x \in D_f$ nous avons : $f(x)-f(-x) = f(x)-(-f(x))$ car f est une fonction impaire

Donc : $f(x)-f(-x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$

D'où : $f(x)-f(-x) = 2f(x)$

Par suite : $f(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$: Pour tout $x \in D_f$

PROF: ATMANI NAJIB

4) $g(x)=f(x)+1=-4x^3+\frac{1}{2x}+1$; on a : $D_g=\mathbb{R}^*$

$g(-1)=-4(-1)^3+\frac{1}{2(-1)}+1=\frac{9}{2}$

et $g(1)=-4(1)^3+\frac{1}{2\times 1}+1=-\frac{5}{2}$ et $-g(1)=\frac{5}{2}$

Nous remarquons que : $g(-1)\neq -g(1)$ et $g(-1)\neq g(1)$

Qui signifie que la fonction g est ni paire ni impaire,

Exercice7 : Soit la fonction f définie par: $f(x)=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f
3) Donner une interprétation graphique

Solution :1) $f(x)=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x+2|-|x-2|\neq 0\}$

$|x+2|-|x-2|=0$ Signifie $|x+2|=|x-2|$ C'est-à-dire : $x+2=x-2$ ou $x+2=-(x-2)$

Signifie $2=-2$ ou $2x=0$

C'est-à-dire : $2=-2$ (pas de solution) ou $x=0$

Signifie : $x=0$ Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2)Etude de la parité de la fonction f

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$

☞ $f(-x)=\frac{(-x)^3}{|-x+2|-|-x-2|}=\frac{-x^3}{|-(x-2)|-|-(x+2)|}=\frac{-x^3}{|x-2|-|x+2|}$ Car $|-x|=|x|$

$f(-x)=\frac{-x^3}{-(-|x-2|+|x+2|)}=\frac{x^3}{-|x-2|+|x+2|}=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$

Donc : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3)Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative

Exercice8 : Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4\sin x-3$

Montrer que : g est Bornée.

Solution : On a $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\leq\sin x\leq 1$ donc $-4\leq 4\sin x\leq 4$

Donc $-4-3\leq 4\sin x-3\leq 4-3$

Donc $-7\leq g(x)\leq 1$

Donc : g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice9 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1) Déterminer D_f

PROF: ATMANI NAJIB

2) Montrer que 1 est le minimum absolu de f sur D_f

3) Montrer que $\frac{7}{3}$ est le maximum absolu de f sur D_f

4) Que peut-on déduire ?

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+3\neq 0\}$

$\Delta=-3\prec 0$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-1(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$$

$f(x)-1=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$ Or $x^2+3x+3\succ 0$ car $\Delta=-3\prec 0$(signe de a=1)

Et on a : $(x+2)^2\geq 0$ donc $f(x)\geq 1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=1$

$$f(x)=1\Leftrightarrow f(x)-1=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}=0\Leftrightarrow(x+2)^2=0\Leftrightarrow x+2=0\Leftrightarrow x=-2$$

Donc : $f(-2)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : 1 est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

3) Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-\frac{7}{3}=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-\frac{7}{3}=\frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}\leq 0$$

Par suite : f est majorée par $\frac{7}{3}$.

$$f(x)=\frac{7}{3}\Leftrightarrow f(x)-\frac{7}{3}=\frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

Conclusion : $f(x)\leq f(0)\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $\frac{7}{3}$ est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

4)On a : $\forall x\in\mathbb{R}$: $1\leq f(x)\leq\frac{7}{3}$

Donc :f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice10 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

2) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $\quad f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4=x^2+2x\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2-4$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

$f(x)=\left(x+\sqrt{x}\right)^2-4$ Donc : $f(x)+4=\left(x+\sqrt{x}\right)^2\geq 0$

Donc : $f(x)+4\geq 0$ par suite : $f(x)\geq -4$ et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\geq f(0)$

Donc : $f(0)=-4$ est une valeur minimale de f au point $x_0=0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M\in\mathbb{R} : f(x)\leq M \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : \left(x+\sqrt{x}\right)^2-4\leq M \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : \left(x+\sqrt{x}\right)^2\leq M+4$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : x+\sqrt{x}\leq\sqrt{M+4}$ (On peut toujours supposer $M\geq 0$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x}\right)^2+2\times\frac{1}{2}\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : \sqrt{x}\leq\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ : x\leq\left(\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2$$ Absurde

Donc : f est non majorée

Exercice11 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2+3x+5$

1)a) Démontrer que f est majorée.

b) Est ce que f admet une valeur maximale ?

2) Démontrer que f est non minorée.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

1)a) $f(x)=-x^2+3x+5=-\left(x^2-3x\right)+5$ $\qquad x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

Donc on a : $f(x)=-\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+5=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+5=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$

Donc : $f(x)-\frac{29}{4}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)\leq\frac{29}{4}$

Alors : f est majorée par $\frac{29}{4}$

b) On a : $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{29}{4}$ donc : $f(x)\leq f\left(\frac{3}{2}\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : f admet une valeur maximale c'est : $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{29}{4}$

2) Démontrons que f est non minorée.

Supposons f minorée donc : $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : m \leq -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{4} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{29}{4} - m$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} \leq \sqrt{\frac{29}{4} - m}$ (On peut toujours supposer $\frac{29}{4} \geq m$)

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \sqrt{\frac{29}{4} - m}$

Donc on a : $-\sqrt{\frac{29}{4} - m} \leq x - \frac{3}{2} \leq \sqrt{\frac{29}{4} - m} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc on a : $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{29}{4} - m} \leq x \leq \sqrt{\frac{29}{4} - m} + \frac{3}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ absurde car on prend par exemple :

$x = \sqrt{\frac{29}{4} - m} + 2025$ et $x > \sqrt{\frac{29}{4} - m} + \frac{3}{2}$

Donc f est non minorée

Exercice12 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x^3+2}$:

1) Soient : $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Monter que : $T(x_1;x_2) = \frac{2 - x_1 \times x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)}$

2) En déduire les variations de f sur $I = [0,1]$ et sur $J = [1;+\infty[$

3) Monter que : la fonction f est bornée sur $[2,4]$

Solution :1) Soient : $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^3+2} - \frac{x_2}{x_2^3+2} = \frac{2(x_1 - x_2) - x_1x_2(x_1{}^2 - x_2{}^2)}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)} = \frac{(x_1 - x_2)(2 - x_1x_2(x_1 + x_2))}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)}$$

Donc : $T(x_1;x_2) = \frac{2 - x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)}$

2) →Soient : $x_1 \in [0,1]$ et $x_2 \in [0,1]$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Alors : $0 \leq x_1 \leq 1$ et $0 \leq x_2 \leq 1$ donc : $0 \leq x_1x_2 \leq 1$ et $0 \leq x_1 + x_2 \leq 2$

Donc : $0 \leq x_1x_2(x_1 + x_2) \leq 2$ c'est-à-dire : $2 - x_1x_2(x_1 + x_2) \geq 0$

Comme : $x_1 \geq 0$ et $x_1 \geq 0$ alors : $(x_1^3+2)(x_2^3+2) > 0$

Par suite : $T(x_1;x_2) = \frac{2 - x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)} \geq 0$ car $(x_1{}^2+4)(x_2{}^2+4) > 0$ et $4 > 0$

PROF: ATMANI NAJIB

D'où : f est croissante sur $I=[0,1]$

→Soient : $x_1 \in [1;+\infty[$ et $x_2 \in [1;+\infty[$ deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

Alors : $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ et $x_1 \neq x_2$ donc : $x_1x_2 > 1$ et $x_1 + x_2 > 2$

Donc : $x_1x_2(x_1+x_2) > 2$ c'est-à-dire : $2 - x_1x_2(x_1+x_2) < 0$

Comme : $x_1 \geq 1$ et $x_1 \geq 1$ alors : $(x_1^3+2)(x_2^3+2) > 0$

Par suite : $T(x_1;x_2) = \dfrac{2 - x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1^3+2)(x_2^3+2)} < 0$

D'où : f est décroissante sur $J=[1;+\infty[$

3) Montrons que : la fonction f est bornée sur $[2,4]$

Soit : $x \in [2,4]$ donc : $2 \leq x \leq 4$ et comme f est décroissante sur $J=[1;+\infty[$

Alors : $f(4) \leq f(x) \leq f(2)$ et comme : $f(2) = \dfrac{2}{2^3+2} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ et $f(4) = \dfrac{2}{4^3+2} = \dfrac{2}{66} = \dfrac{1}{33}$

Alors : $\dfrac{1}{33} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{5}$

Donc :la fonction f est bornée sur $[2,4]$

Exercice 13 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et périodique de période $T=1$

Tel que : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ si $x \in [0;1[$

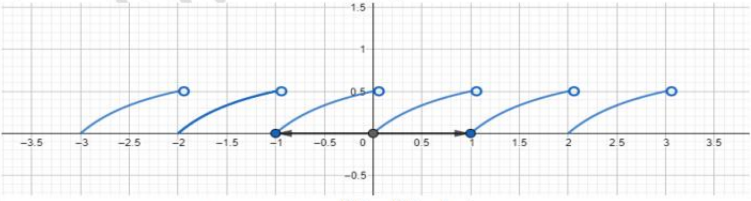
1)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $[-3;3] \cap D_f$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(0,5)$; $f(-10,5)$; $f(2027,01)$

3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k = [k;k+1[$ $k \in \mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0 = [0;1[$: :la courbe (C_f) c'est une portion d'une hyperbole

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3] \cap D_f$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0 = [0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$



2) → Puisque : $0,5 \in [0;1[$ Alors $f(0,5)=\frac{0,5}{0,5+1}=\frac{0,5}{1,5}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

$\rightarrow f(-10,5)=f(-11+0,5)=f(-11\times 1+0,5)=f(0,5)$ car f est périodique de période $T=1$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(-10,5)=f(0,5)$ et puisque : $0,5\in[0;1[$

Alors : $f(-10,5)=f(0,5)=\frac{1}{3}$

$\rightarrow f(2027,01)=f(2027+0,1)=f(2027\times 1+0,1)=f(0,1)$ car f est périodique de période $T=1$;

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $f(2027,01)=f(0,1)$ et puisque : $0,1\in[0;1[$

Alors : $f(2027,01)=f(0,1)=\frac{0,1}{0,1+1}=\frac{0,1}{1,1}=\frac{1}{11}$

3) L'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[k;k+1[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[k;k+1[\Leftrightarrow k\le x<k+1$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\le x-k<1\Leftrightarrow f(x-k)=\frac{x-k}{x-k+1}$

Or : f est périodique de période $T=1$ alors : $f(x-k)=f(x-k\times 1)=f(x)$

Donc : $f(x)=\frac{x-k}{x-k+1}$ si $x\in I_k=[k;k+1[$; $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 14 : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-x^2+4x-1$

1)Préciser le domaine de définition de g

2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$

3)Etudier la monotonie de g sur : $I=[2;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;2]$

4)Dresser le tableau de variation de g

5)En déduire les extrémums de g sur $\mathbb{R}$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=x-1$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)>f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution :1) g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

2)Soient : $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(-x_1^2+4x_1-1)-(-x_2^2+4x_2-1)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_1^2+x_2^2+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1^2-x_2^2)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(-x_1-x_2+4)}{x_1-x_2}=-x_1-x_2+4$$

Donc : $\boxed{T(x_1;x_2)=-x_1-x_2+4}$

3)a) Etude de la monotonie de g sur : $I=[2;+\infty[$

Soients : $x_1 \in [2;+\infty[$ et $x_2 \in [2;+\infty[$ alors $x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2$ et $x_1 \neq x_2$ donc : $x_1+x_2>4$

Donc $-x_1-x_2<-4$ par suite : $-x_1-x_2+4<0$

Donc $T(x_1;x_2)<0$ d'où : g est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de g sur : $J=]-\infty;2]$

Soients : $x_1 \in]-\infty;2]$ et $x_2 \in]-\infty;2]$

Alors : $x_1 \leq 2$ et $x_2 \leq 2$ et $x_1 \neq x_2$ cela implique $x_1+x_2<4$

Donc $-x_1-x_2>-4$ par suite : $-x_1-x_2+4>0$

Donc $T(x_1;x_2)>0$

D'où : g est strictement croissante sur $]-\infty;2]$

4) Résumé : tableau de variation : On a : $g(2)=-2^2+4\times 2-1=-4+8-1=3$

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	↗	3	↘

5) $g(2)=3$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection A et B de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation: $g(x)=0$.

$g(x)=0$ Signifie $-x^2+4x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-1)\times(-1)=16-4=12>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4+\sqrt{4\times 3}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2(2-\sqrt{3})}{-2}=2-\sqrt{3}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4-\sqrt{4\times 3}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2(2+\sqrt{3})}{-2}=2+\sqrt{3}$$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses sont :

$C(2-\sqrt{3};0)$ et $D(2+\sqrt{3};0)$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

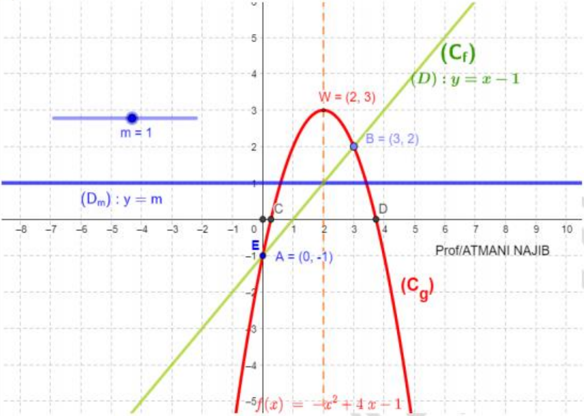
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

---

Et on a $g(0)=-0^2+4\times0-1=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

7)



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=0$ et $x=3$ donc $S=\{0;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $-x^2+4x-1=x-1$ c'est-à-dire : $-x^2+3x=0$

Signifie : $x(-x+3)=0$

Signifie : $-x+3=0$ ou $x=0$

C'est-à-dire : $x=3$ ou $x=0$

Donc : $S=\{0;3\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)>f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]0;3[$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc $S=]0;3[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)>f(x)$:

$g(x)>f(x)$ Signifie $-x^2+4x-1\succ x-1$

C'est-à-dire : $-x^2+3x>0$

Les racines sont : $x_1=0$ et $x_2=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-x^2+3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=]0;3[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$x^2-4x+m+1=0$ Signifie $m=-x^2+4x-1$

Signifie : $m=g(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $y=m$

Si: $m>3$ l'équation n'admet pas de solution

Si: $m=3$ il y'a une solution c'est : x = 2

Si: $m<3$ il y'a deux solutions

Exercice15 : Soit f une fonction numérique définie par :

$$\begin{cases}(1)\ f\ est\ non\ constante\\ \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}\end{cases}$$

1)Montrer que : $f(0)(f(0)-1)(f(0)+1)=0$

2)Montrer que : $(f(0)-1)(f(0)+1)\neq 0$

3)Déduire que f est impaire

4) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\frac{2x}{1+x^2}\leq 1$

5)Déduire que f est majoré par 1 et minoré par -1

Solution : 1) Montrons que : $f(0)(f(0)-1)(f(0)+1)=0$

Puisque : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Alors : $f(0)=f(0+0)=\dfrac{f(0)+f(0)}{1+f(0)\times f(0)}\Leftrightarrow f(0)=\dfrac{2f(0)}{1+f^2(0)}\Leftrightarrow f(0)(1+f^2(0))=2f(0)$

$\Leftrightarrow f^3(0)+f(0)-2f(0)=0\Leftrightarrow f^3(0)-f(0)=0\Leftrightarrow f(0)(f^2(0)-1^2)=0$

$\Leftrightarrow f(0)(f(0)-1)(f(0)+1)=0$

2) Montrons que : $(f(0)-1)(f(0)+1)\neq 0$

On va raisonner par l'absurde :

PROF: ATMANI NAJIB

On suppose que : $(f(0)-1)(f(0)+1)=0$ essayons de trouver une contradiction avec la faite que f est non constante.

$(f(0)-1)(f(0)+1)=0 \Rightarrow f(0)-1=0$ ou $f(0)+1=0$

$\rightarrow$Si : $f(0)-1=0 \Rightarrow f(0)=1$ essayons de trouver une contradiction

Comme on a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Alors : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=f(0+(x+y))=\dfrac{f(0)+f(x+y)}{1+f(0)\times f(x+y)}$

$\Rightarrow \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{1+f(x+y)}{1+f(x+y)}=1 \Rightarrow f(x+y)=1$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$f est constante : Contradiction

Donc : $f(0)-1\neq 0$

$\rightarrow$Si : $f(0)+1=0 \Rightarrow f(0)=-1$ essayons de trouver une contradiction

Comme on a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Alors : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=f(0+(x+y))=\dfrac{f(0)+f(x+y)}{1+f(0)\times f(x+y)}$

$\Rightarrow \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{-1+f(x+y)}{1-f(x+y)}=\dfrac{-(1-f(x+y))}{1-f(x+y)}=-1 \Rightarrow f(x+y)=-1$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$f est constante : Contradiction

Donc : $f(0)+1\neq 0$

Conclusion : $(f(0)-1)(f(0)+1)\neq 0$

3)Déduisons que f est impaire

On a : $f(0)(f(0)-1)(f(0)+1)=0$ et $(f(0)-1)(f(0)+1)\neq 0$

Je peux déduire d'ici que : $[f(0)=0]$

Montrons que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(-(x+y))=-f(x+y)$

On a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(0)=f(x+(-x))=\dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)\times f(-x)}$

$\Rightarrow 0=\dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)\times f(-x)} \Rightarrow f(x)+f(-x)=0 \Rightarrow f(-x)=-f(x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R} : f(-x)=-f(x)$

PROF: ATMANI NAJIB

Soit : $y \in \mathbb{R}$: $f(0) = f\left(y + (-y)\right) = \dfrac{f(y) + f(-y)}{1 + f(y) \times f(-y)}$

$\Rightarrow 0 = \dfrac{f(y) + f(-y)}{1 + f(y) \times f(-y)} \Rightarrow f(y) + f(-y) = 0 \Rightarrow f(-y) = -f(y)$

Donc : $\forall y \in \mathbb{R} : f(-y) = -f(y)$

Soit : $(x;y) \in \mathbb{R}^2 : f\left(-(x+y)\right) = f\left((-x) + (-y)\right) = \dfrac{f(-x) + f(-y)}{1 + f(-x) \times f(-y)} = \dfrac{-f(x) - f(y)}{1 + (-\times-) f(x) \times f(y)}$

Donc : $f\left(-(x+y)\right) = \dfrac{-f(x) - f(y)}{1 + (-\times-) f(x) \times f(y)} = -\dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x) \times f(y)} = -f(x+y)$

Donc : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : f\left(-(x+y)\right) = -f(x+y)$

Conclusion : f est impaire

4) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\dfrac{2x}{1+x^2} \le 1$

Soit : $x \in \mathbb{R}$ $1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2} \ge 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\dfrac{2x}{1+x^2} \le 1$

5)Déduire que f est majoré par 1 et minoré par -1

Montrons que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le f(x+y) \le 1$

→Montrons que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : f(x+y) \le 1$

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$: Comme $f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x) \times f(y)}$

Alors : $f(x+y) = f\left(\dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{1 + f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \times f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)} = \dfrac{2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{1 + \left(f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right)^2} \le 1$

car : $\forall X \in \mathbb{R}$; $\dfrac{2X}{1+X^2} \le 1$ en particulier pour : $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = X$

→Montrons que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le f(x+y)$

On sait que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : f\left(-(x+y)\right) = -f(x+y)$

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$: Comme $f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x) \times f(y)}$

Alors : $f\left(-(x+y)\right) = f\left(-\dfrac{x+y}{2} + -\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right) + f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)}{1 + f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right) \times f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)} = \dfrac{2f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)}{1 + \left(f\left(-\dfrac{x+y}{2}\right)\right)^2} \le 1$

Alors : $f\left(-(x+y)\right) \le 1$

PROF. ATMANI NAJIB

Alors : $-f(x+y)\leq 1$

Donc : $f(x+y)\geq -1$

Conclusion : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq f(x+y)\leq 1$

C'est-à-dire : f est majoré par 1 et minoré par -1

Exercice16 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2-4x+3$

1) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x)=x^2-|x(x-2)|-2x+3$

a) Déterminer D_g et écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

3)Tracer la courbe représentative de (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$

Solution : 1) On a : $f(x)=2x^2-4x+3$: f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=-3$; $b=4$ et $c=1$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times(2)}=1$ et $f(1)=f(1)=2\times(1)^2-4\times1+3=2-4+3=1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

Comme : $\boxed{a=2>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;1]$

Tableau de variations de f : On a $a=2>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x)=x^2-|x(x-2)|-2x+3$

On a : $D_g=\mathbb{R}$

Etudions le signe de : $x(x-2)$

$x(x-2)=0$ Signifie que : $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

① Si $x\in[0;2]$: $g(x)=x^2-(-x(x-2))-2x+3$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc : $g(x)=x^2+x(x-2)-2x+3=x^2+x^2-2x-2x+3$

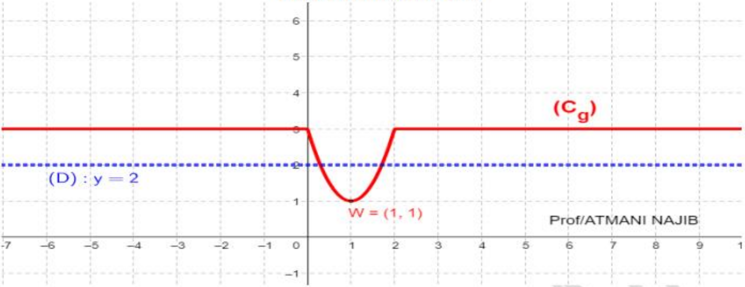
Donc : $g(x)=2x^2-4x+3$

② Si $x\geq 2$ ou $x\leq 0$: $g(x)=x^2-(x(x-2))-2x+3$

Donc : $g(x)=x^2-x(x-2)-2x+3=x^2-x^2+2x-2x+3$

Donc : $g(x)=3$ (constante)

3) Représentation graphique de la courbe représentative de (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



4) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$

$x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$ Signifie $x^2-|x(x-2)|-2x+1+2=2$

Signifie : $x^2-|x(x-2)|-2x+3=2$

Signifie : $g(x)=2$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $(D): y=2$

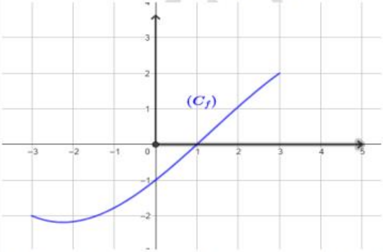
Puisque : la droite $(D): y=2$ coupe (C_g) en deux points alors :

L'équation : $x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$ admet exactement 2 solutions

Exercice17 : Soit si dessous : (C_f) La courbe représentative d'une fonction f

Et Soit g une fonction définie par : $g(x-5)=x$

Déterminer x si on sait que : $(f\circ g\circ f)(2x)=2$



Solution : Déterminons x si on sait que : $(f\circ g\circ f)(2x)=2$

$(f\circ g\circ f)(2x)=2 \Leftrightarrow f\left(g\left(f(2x)\right)\right)=2 \Leftrightarrow g\left(f(2x)\right)=3$ car $f(3)=2$

Puisque : $g(x-5)=x$ alors : $g(x)=x+5$

Donc : $g\left(f(2x)\right)=f(2x)+5$

$(f\circ g\circ f)(2x)=2 \Leftrightarrow f(2x)+5=3 \Leftrightarrow f(2x)=-2 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{-3}{2}}$

Exercice 18 : Soit h une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\sqrt{x^2+2}$

En utilisant les propriétés de la monotonie des fonctions composées
Etudier les variations de h

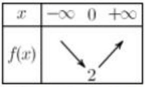
Solutions : On a : $D_f=\mathbb{R}$

On peut décomposer la fonction h et l'écrire sous la forme : $h=g\circ f$

$f(x)=x^2+2$ et $g(x)=\sqrt{x}$

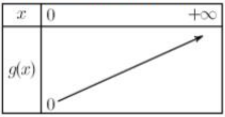
$h(x)=(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\sqrt{x^2+2}$

Tableau de variation de f :



x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	↘ 2 ↗

Tableau de variation de g :



x	0 $+\infty$
$g(x)$	0 ↗

a) On a : $h(x)=(g\circ f)(x)$

→Sur $[0;+\infty[$: On a $x\in[0;+\infty[\Rightarrow x\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+2\geq 2 \Rightarrow f(x)\geq 2 \Rightarrow f(x)\in[2;+\infty[$

$\Rightarrow f(x)\in[0;+\infty[$

ATMANI NAJIB

Donc : $f([0;+\infty[) \subset [0;+\infty[$

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $f([0;+\infty[) \subset [0;+\infty[$ et g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors : $h = g \circ f$ est croissante sur $[0;+\infty[$

→Sur $]-\infty;0]$: On a $x \in]-\infty;0] \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 2 \Rightarrow f(x) \in [2;+\infty[$

$\Rightarrow f(x) \in [0;+\infty[$

Donc : $f(]-\infty;0]) \subset [0;+\infty[$

Puisque f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et $f(]-\infty;0]) \subset [0;+\infty[$ est g strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors : $h = g \circ f$ est décroissante sur $]-\infty;0]$

Exercice 19 : Soit f une fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x + 2 & ; x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x+4} & ; x \succ 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) a) Démontrer que : f admet un minimum relatif en -1

b) Démontrer que : f admet un minimum absolu en -1

3) Donner le tableau de variation de f :

4) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) a) Vérifier que : $\forall a \in [2;+\infty[\; ; \; f(a^2-4) = a$

b) Montrer que : f n'est pas majorée

6) a) Déterminer $f \circ f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Étudier les variations de $f \circ f$

Solution :1) $D_1 = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\} =]-\infty;0]$ et $D_2 = \{x \in \mathbb{R} / x+4 \geq 0 \;\; et \;\; x \succ 0\} =]0;+\infty[$

Donc : $D_f = D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$

2) a) Montrons que : $x \in]-\infty;0[\; ; \; f(-1) \leq f(x)$

On a : $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 2 = 1$

Si $x \in]-\infty;0[\; ; \; f(x) - f(-1) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$

Donc : $x \in]-\infty;0[\; ; \; f(-1) \leq f(x)$

Donc : f admet un minimum relatif en -1

b) Si $x \in]-\infty;0]$; $f(x) - f(-1) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$

Donc : $x \in]-\infty;0]$; $f(-1) \leq f(x)$

Si $x \in]0;+\infty[\; ; \; x \succ 0 \Rightarrow x + 4 \succ 4 \Rightarrow \sqrt{x+4} \succ \sqrt{4} = 2 \succ 1 = f(-1)$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f(-1) \leq f(x)$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ f(-1) \leq f(x)$

D'où : f admet un minimum absolu en -1

3) tableau de variation de f :

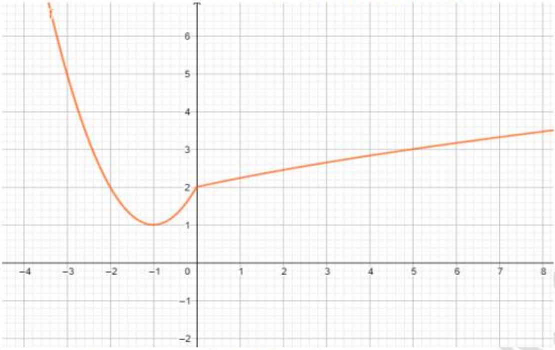
x	0	$+\infty$
$\sqrt{(x+4)}$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$	-1	0
x^2+2x+2	↘	1	↗

D'où :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x^2+2x+2	↘	1 ↗	2	↗

4) Traçage de la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



5) a) Vérifions que : $\forall a \in [2;+\infty[\ ; \ f(a^2-4) = a$

$a \in [2;+\infty[\Rightarrow a \geq 2 \Rightarrow a^2 \geq 4 \Rightarrow a^2 - 4 \geq 0$

On a : $\begin{cases} f(x) = x^2+2x+2 & ; x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x+4} & ; x \succ 0 \end{cases}$

Si : $a = 2 \Rightarrow a^2 - 4 = 0$

$f(a^2-4) = f(0) = 0^2 + 2\times 0 + 2 = 2$ Donc : $f(a^2-4) = a$ dans ce cas

Si : $a \succ 2 \Rightarrow a^2 - 4 \succ 0$

ATMANI NAJIB

$f\left(a^{2}-4\right)=\sqrt{a^{2}-4+4}=\sqrt{a^{2}}=|a|=a$ car $a \succ 2$

Donc : $f\left(a^{2}-4\right)=a$ dans ce cas

Donc : $\forall a \in [2;+\infty[\ ;\ f\left(a^{2}-4\right)=a$

b) Montrons que : f n'est pas majorée

Supposons que f est majorée

Donc : $\exists M \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in D_f\ :\ f(x) \leq M$ ©

Soit : a tel que $a \succ M$ et $a \geq 2$:c'est-à-dire : $a \in [2;+\infty[$

D'après la question précédente : on a : $f\left(a^{2}-4\right)=a \Rightarrow f\left(a^{2}-4\right) \succ M$ contradiction avec : ©

Donc : f n'est pas majorée.

6) a) Déterminons $f \circ f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$f \circ f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Si $x \in]-\infty;0]$; $f \circ f(x)=f(f(x))=f\left(x^{2}+2x+2\right)=\sqrt{x^{2}+2x+2+4}=\sqrt{x^{2}+2x+6}$ car $x^{2}+2x+2 \succ 0$

Si $x \in]0;+\infty[$; $f \circ f(x)=f(f(x))=f\left(\sqrt{x+4}\right)=\sqrt{\sqrt{x+4}+4}$ car $\sqrt{x+4} \succ 0$

b) Étude des variations de $f \circ f$:

- Puisque f est croissante sur $[-1;+\infty[$ et $f([-1;+\infty[)=[1;+\infty[$ et f est croissante sur $f([-1;+\infty[)=[1;+\infty[$ alors $f \circ f$ est décroissante sur $[-1;+\infty[$
- Puisque f est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et $f(]-\infty;-1])=[1;+\infty[$ et f est croissante sur $[1;+\infty[$ Alors $f \circ f$ est décroissante sur $]-\infty;-1]$

Exercice 20 : Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{x-3}$ et $g(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

et $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ Les courbes représentatives de f et g

1)a) Déterminer D_f et D_g

b) Déterminer les tableaux de variations de f et g

c) Tracer les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ dans un même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \prec g(x)$

3) Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation $g(x)=-x$

4) Résoudre algébriquement l'équation $g(x)=-x$

5) Etudier la monotonie de $f+g$ sur : $[3;+\infty[$

6) On pose : $h(x)=(g \circ f)(x)\ \ \forall x \in D_h$ a) Déterminer D_h b) Ecrire $h(x)$ en fonction de x

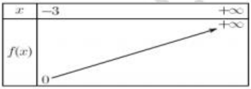
c) Étudier la monotonie de h dans l'intervalle : $[3;+\infty[$

Solution :1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-3\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 3\}=[3,+\infty[$

On a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

b) Déterminer les tableaux de variations de f et g : $f(x)=\sqrt{x-3}$ et $g(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

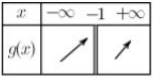
Pour : $f(x)=\sqrt{x-3}$



f Est strictement croissante sur $[3;+\infty[$

Pour : $g(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$ En générale si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $g(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $W(-1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-1$ et $y=1$

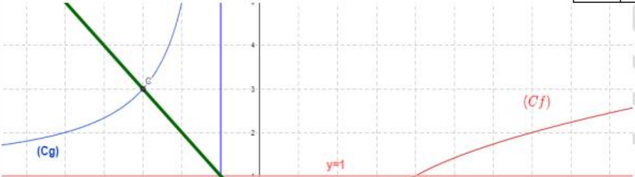


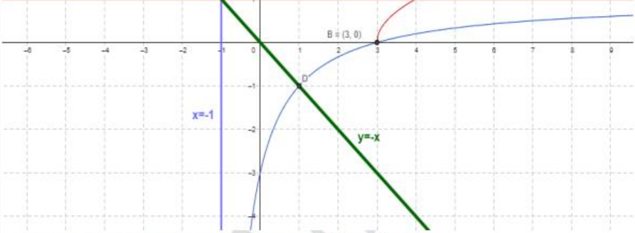
et on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+3=4\succ 0$

c) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

$f(x)=\sqrt{x-3}$: tableau des valeurs

x	3	4	7
$f(x)$	0	1	2





2) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \prec g(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est toujours au -dessus sur $[3;+\infty[$

Donc : $S=\varnothing$

3) Détermination graphique du nombre des solutions de l'équation $g(x)=-x$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_g) et la droite (D) d'équation : $y=-x$: il y'a deux points d'intersections

Donc : nombre des solutions de l'équation $g(x)=-x$ est 2

4) Résolution algébrique de l'équation $g(x)=-x$

$g(x)=-x \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1}=-x \Leftrightarrow -x^2-x=x-3 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16>0$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$ et $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

Donc : $S=\{-1;3\}$

5) Etudie de la monotonie de $f+g$ sur : $[3;+\infty[$

$f+g$ est la somme de deux fonction croissante sur : $[3;+\infty[$

Donc : $f+g$ est une fonction croissante sur : $[3;+\infty[$

6) On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad \forall x\in D_h$

a) Détermination de D_h : $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\in D_f \ \ et \ \ f(x)\in D_g\}$

On a : $D_f=[3,+\infty[$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

Donc : $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 3 \ et \ \sqrt{x-3}\neq -1\}=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 3\ \}=[3;+\infty[$

Donc : $D_h=[3;+\infty[$

b) Ecriture de $h(x)$ en fonction de x : On a : $f(x)=\sqrt{x-3}$ et $g(x)=\frac{x-3}{x+1}$

Donc : $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{\sqrt{x-3}-3}{\sqrt{x-3}+1}$; $\forall x\in[3;+\infty[$

c) Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[3;+\infty[$

On a : $h(x)=(g\circ f)(x)$

Puisque f est croissante sur $[3;+\infty[$ et $f([3;+\infty[)\subset[0;+\infty[$ et g est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $g\circ f$ est croissante sur $[3;+\infty[$

Exercice 21 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x-E(x)}$

1) Calculer : $f(1,5)$; $f(-2,75)$

2) Déterminer D_f

3) Vérifier que 1 est une période pour la fonction f

3) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=]0;1[$

4) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]\cap D_f$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : $f(x)=\dfrac{1}{x-E(x)}$

1) Calculons : $f(1,5)$; $f(-2,75)$

$$f(1,5)=\frac{1}{1,5-E(1,5)}=\frac{1}{1,5-1}=\frac{1}{0,5}=2$$

$$f(-2,75)=\frac{1}{-2,75-E(-2,75)}=\frac{1}{-2,75-(-3)}=\frac{1}{3-2,75}=\frac{1}{0,25}=4$$

2) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-E(x)\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq E(x)\}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

3) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$ et $x-1\in\mathbb{R}$
- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+1)=\dfrac{1}{x+1-E(x+1)}=\dfrac{1}{x+1-E(x)-1}=\dfrac{1}{x-E(x)}=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

4) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :

$D_E=(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\cap[0;1[=]0;1[$

Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=]0;1[$:

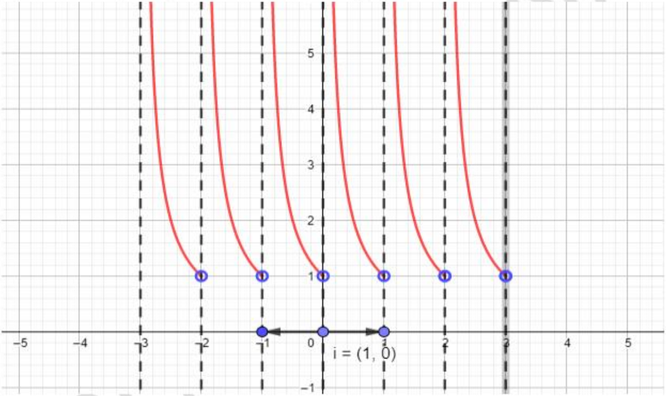
$x\in]0;1[\Leftrightarrow 0\prec x\prec 1$ Donc : $E(x)=0$

Donc : $f(x)=\dfrac{1}{x-E(x)}=\dfrac{1}{x-0}=\dfrac{1}{x}$

Donc : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ si $x\in]0;1[$

5) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]\cap D_f$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]\cap D_f$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $x\in]0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien