Correction Série N°14 : Généralités sur les fonctions

Exercice01 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$ 2) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. 3) $g(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$

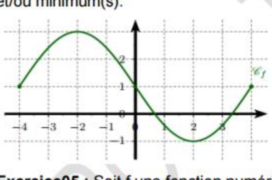
Exercice02 : 1) On considère une fonction f paire définie sur $\mathbb{R}$ et on suppose qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle [1;6].
Etudier son sens de variations sur l'intervalle [−6;−1]?

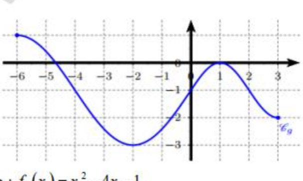
2)On considère une fonction g impaire définie sur $\mathbb{R}$ et on suppose qu'elle est strictement décroissante sur l'intervalle [2;10]. Quel est son sens de variations sur l'intervalle [−10;−2]?

Exercice03 : 1 Dresser le tableau de variation d'une fonction f sachant que :
- f est définie sur l'intervalle [−3;6];
- f est décroissante sur l'intervalle [−3;0];
- f est croissante sur l'intervalle [0;3];
- f est décroissante sur l'intervalle [3;6];
- l'image de 0 est −1 et f(3) = 5;
- la courbe de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses −3; 2 et 6.

2) Tracer une représentation possible de la courbe représentant la fonction f.
3) Donner un intervalle sur lequel cette fonction est négative.
4) Préciser les extremums de la fonction f.

Exercice 04 : Dresser son tableau de variation des fonctions f et g et préciser leur(s) maximum(s) et/ou minimum(s).





Exercice05 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2-4x-1$

1) Préciser le domaine de définition de f
2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$ Montrer que : $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2-4$
3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$
b) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;2]$
4) Dresser le tableau de variation de f
5) a) En déduire que : pour tout $x\in[3;5]$ On a : $-4\le f(x)\le 4$
b) En déduire que : pour tout $x\in[-3;1]$ On a : $-4\le f(x)\le 20$

Exercice06 : Soit f une fonction numérique tel que: $f(x)=2x^2-4x-2$

(C_f) Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f
2) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
3) Déterminer graphiquement de l'image des l'intervalles : $[1;2]$ et $]-\infty;1]$

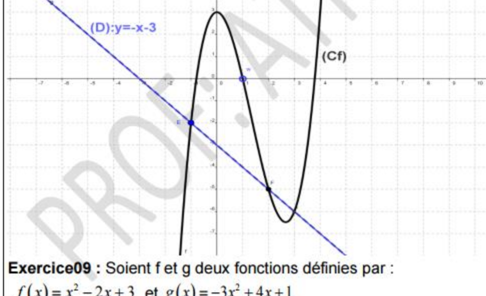
Exercice07 : Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2-3x-4$ et $g(x)=3x+12$.

1) Tracer Les courbes (C_f) et (C_g)
2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$
3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x)\ge g(x)$
4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Exercice08: Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x)=x^3-4x^2+3$ et la droite (D) d'équation $y=-x-3$ (voir la figure)

1)Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=3$ puis l'inéquation $f(x)<3$.
2)Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$ et l'inéquation $f(x)\ge 0$
3)Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=-x-3$ puis l'inéquation $f(x)\le -x-3$



Exercice09 : Soient f et g deux fonctions définies par :
$f(x)=x^2-2x+3$ et $g(x)=-3x^2+4x+1$

Etudier les variations de f et de g et donner la nature des courbes (C_f) de f et de (C_g) de g et donner les éléments caractéristiques de (C_f) et de (C_g)

Exercice10 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par :
$f(x)=x^2-2x-1$ et $g(x)=2x-4$

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f
2)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)
3)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$
4)Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x)>g(x)$
5)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Exercice11 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer D_f
2) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation
3) Tracer la dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Exercice12 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) Déterminer D_f
2) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation
3) Tracer la dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Exercice13 : Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x+2$ et $g(x)=\sqrt{x-1}+1$

1) Etudier les variations des deux fonctions f et g.
2) soit h la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$.
a) Montrer que $f\circ h$ et $h\circ f$ sont définies sur $[1;+\infty[$
b) Montrer que : $f\circ h=h\circ f=I_d$
c) En déduire que f et h sont des bijections de $[1;+\infty[$ vers $[1;+\infty[$ et déterminer leur bijection

Exercice14 : Soit f une fonction numérique définie sur $[0,12]$ tel que : $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{12-x}$

1)a) Montrer que : $\forall x\in[0,12]$; $12-x\in[0,12]$ et $f(12-x)=f(x)$
b) Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$; les points $M(x,y)$ et $M(12-x,y)$ son symétrique
Par rapport à la droite : $(D):x=6$
c) En déduire que la droite $(D):x=6$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f)
2) Etudier les variation de la fonction f sur [0,6] puis sur [6,12] .
3) En déduire la comparaison des nombres : $\sqrt{2}+\sqrt{10}$; $\sqrt{3}+3$; $\sqrt{5}+\sqrt{7}$

Exercice15 : Soient f et g les deux fonctions définies par :

$g(x)=\frac{6x+1}{2x+1}$ et $f(x)=2x^2-x+2$ avec (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)a) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g
b) Déterminer la nature de (C_f) et (C_g) en déterminant les éléments caractéristiques
2) a) Montrer que : $f(x)=g(x)\Leftrightarrow(2x-1)^2(x+1)=0$
b) Déduire les points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)
c)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
3) Résoudre graphiquement l'inéquation : $2x^2-x>\frac{2x-1}{2x+1}$
4) On pose : $F(x)=2x-\sqrt{x-1}$
a) Déterminer une fonction h tel que : $F(x)=(f\circ h)(x)$
b) Etudier les variations de : F sur $[1,10]$

Exercice16 : On considère la fonction h définie par : $h(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2}$

1) Déterminer : D_h
2) Montrer que : h est la composée de deux fonctions f et g à déterminer
3) Déduire les variations de h

Exercice17 : Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=\frac{x}{x+2}$ et $g(x)=\frac{x}{|x|+2}$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
2) Etudier la parité de la fonction g
3) Etudier les variations de g
4) Tracer La courbe représentative (C_g) de g dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice18: On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

1) Déterminer : D_f
a) Montrer que g est impaire et que : $\forall x;y\in\mathbb{R}$ et $x\neq y$; $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{2(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}$
2) b) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles : $[1;+\infty[$ et $[0;1[$
c) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Exercice19 : On considère la fonction h définie par : $h(x)=\sqrt{x^2-2x}$

1) Déterminer : D_h
2) Montrer que : h est la composée de deux fonctions f et g à déterminer

3) Déduire les variations de h sur D_h

Exercice20 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

1) Déterminer : D_h
2) Montrer que :
a) 3 est le maximum absolu de f en 1.
b) -1 est le minimum absolu de f

Exercice21 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{4x-3}{x^2+1}$

1) Montrer pour tout $x;y\in\mathbb{R}$ et $x\neq y$; $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{(2x+1)(2-y)+(2y+1)(2-x)}{(x^2+1)(y^2+1)}$ on a
2) En déduire les variations de f sur chacun des intervalles : $[2;+\infty[$ et $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ et $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$
3) Déterminer le maximum absolu et le minimum absolu de f .
4) Montrer que : $f([2;+\infty[)=]0;1[$
5)On considère la fonction g définie par : $g(x)=\frac{4x-3x^2}{x^2+1}$
a) Montrer que : $\forall x\neq 0$; $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$
b) En déduire les variations de la fonction g sur chacun des intervalles : $[2;+\infty[$; $\left[\frac{1}{2},2\right]$; $\left]0;\frac{1}{2}\right]$;
$\left[-\frac{1}{2};0\right[$; $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ et $]-\infty;-2]$

Exercice 22 : Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=x^2-x$ et $g(x)=\sqrt{x+2}$ avec (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)a) Construire dans un même repère les courbes (C_f) et (C_g)
b) Déterminer combien de solution admet l'équation : $f(x)=g(x)$
c) Déterminer graphiquement : $g\left(\left[-2,-\frac{7}{4}\right]\right)$ et $g\left(\left[-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)$
2)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction : $h=f\circ g$
b) Montrer que : $\forall x\in D_h$: $h(x)=(f\circ g)(x)=\left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$
c) Montrer : $-\frac{1}{4}$ est une valeur minimale de $h=f\circ g$ sur D_h

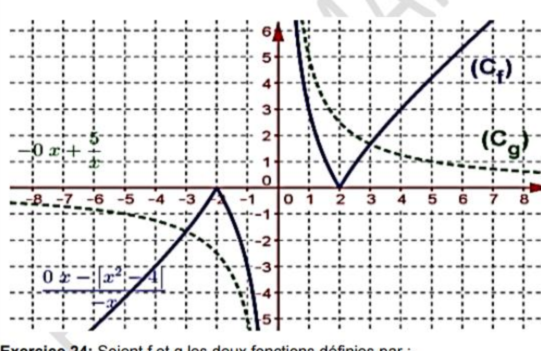
d) Etudier la monotonie de la fonction $h=f\circ g$ sur $\left[-2,-\frac{7}{4}\right]$ et $\left[-\frac{7}{4};+\infty\right[$

3) Soit k est la restriction de $h=f\circ g$ sur : $I=\left[-\frac{7}{4};+\infty\right[$

Monter que h est une bijection de ***I*** vers $J=\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$ est déterminer sa bijection

Exercice23 : Soient ***f*** et ***g*** deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par leurs graphes

1) Dresser le tableau des variations de la fonction f
2)a) Résoudre graphiquement l'équation **f(x) = 0**
b) Déduire l'ensemble de définition de ***h*** définie par : $h(x)=\frac{1}{f(x)}$
3)a) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\ge 0$
b) Déduire l'ensemble de définition de k définie par : $k(x)=\sqrt{f(x)}$
4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)>g(x)$



Exercice 24: Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=\sqrt{x+1}$ et $g(x)=-x^3$ avec (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Construire dans un même repère les courbes (C_f) et (C_g)
2) En déduire que l'équation : $x^3+\sqrt{x+1}=0$ admet une solution unique α tel que : $-\frac{7}{8}<\alpha<-\frac{3}{4}$

3) Résoudre dans $[-1;+\infty[$ l'inéquation : $x^3+\sqrt{x+1}<0$
4) Déterminer graphiquement : $f([-1,2])$ et $f([3;+\infty[)$

Exercice 25 : Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $g(x)=\frac{x+1}{x-2}$
Déterminer le domaine de définition la fonction $F=g\circ f$ puis étudier ses variations.

Exercice 26 : Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=x^2-4x+5$
Déterminer le domaine de définition la fonction $h=g\circ f$ puis étudier ses variations.

Exercice 27 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{8x+4}{x^2+2x+1}$

1) Déterminer : D_f
2) Montrer que f admet un maximum absolu.
3) On considère la fonction g définie par : $g(x)=4-x^2$
a) Déterminer une fonction h telle que : $\forall x\in D_f$; $f(x)=(g\circ h)(x)$
b) En déduire les variation de f .

Exercice 28 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^3+x^2+x$

1) a) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ $x^2+x(1+y)+y^2+y+1>0$
b) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x)=\frac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$
a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $g(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
b) En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice29 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$

1) Déterminer : D_f
2) Montrer que : : $\forall x\in D_f$; $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$
3) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}^-$
4) Soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$
Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1;+\infty[$ puis déterminer sa bijection réciproque.

Exercice30 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2-1}$

1) Déterminer : D_f
2) On considère la fonction g définie par : $g(x)=(f(x))^2$
Donner le tableau de variation de g puis celui de f .

Exercice31 : On considère la fonction f définie par : $\begin{cases}f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\ si\ x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$

1) Déterminer : D_f
2) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $-1<f(x)<1$
3) Montrer que 1 et -1 ne sont pas des extremums de la fonction f.

Exercice32 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)$

1) Montrer que : $\forall x\in]0,1[$; $f(x)=1-\frac{2}{x^2-x}$
2) Etudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles : $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2},1\right[$
3) Qu'elle est la valeur maximale que prend le nombre : $A=\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$ lorsque a et b Décrivent $\mathbb{R}_+^*$ en vérifiant : a+ b =1

Exercice33 : Soit f une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ tel que : $f(x)=x-2\sqrt{x-1}-1$

1) Déterminer $A=f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$ et en déduire que f n'est pas injective.
2) On considère les deux fonctions : $u(x)=x^2-2x$ et $v(x)=\sqrt{x-1}$
a) Démontrer que : $f(x)=(u\circ v)(x)$; $\forall x\in[1;+\infty[$
b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation
c) En déduire que f n'est pas surjective de $[1;+\infty[$ vers IR .
3) Déterminer le maximum absolu de la fonction : $g(x)=\frac{1}{x}\left(1-2\sqrt{x-x^2}-1\right)$ sur l'intervalle $\left[\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right]$

Exercice34 : Soient f et g et h les trois fonctions définies par : $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ et $h(x)=x^2+2$

1)Déterminer la nature de la courbe (C_h) de h et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de h et dresser le Tableau de variations de h
2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g
3) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses
4)Tracer Les courbes représentatives (C_h) et (C_g) dans le même repère
5) a) Etudier graphiquement le signe de la fonction g
b) Etudier algébriquement le signe de la fonction g

6) (On admet que (C_g) coupe (C_h) en un point d'abscisse : $\lambda=2,11$

Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x)\ge g(x)$

Exercice35: Partie A : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2+4x-2$

(C_f) Sa courbe représentative

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f
2) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ (C_g) Sa courbe représentative

1)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g
2) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
3) Déterminer graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[0,1[$; $[2;+\infty[$
4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)<g(x)$
(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-2,7$; $0,5$; $1,3$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien